

**ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITA' DI BOLOGNA**

FACOLTA' DI SCIENZE DELLA FORMAZIONE

Corso di laurea in Scienze della Formazione Primaria

Indirizzo: Scuola Elementare

Orientamento: Maior della Matematica e delle Scienze Sperimentali

INIZIAMO DALLE MISCONCEZIONI

PERCORSO DI DIDATTICA DELLA MATEMATICA IN CLASSE

Tesi di laurea in: Didattica della Matematica

Relatore
Prof. Bruno D'Amore

Presentata da
Fabiana Incitti

Sessione: III

Anno Accademico 2003/2004

A Matteo

Il cui ricordo vivrà per sempre nel mio cuore

INDICE

1

INTRODUZIONE

1-40

CAPITOLO 1

1.1 La matematica e la sua didattica 3-20

- 1.1.1 Cos'è la didattica 3
- 1.1.2 Didattica generale e didattica disciplinare 7
- 1.1.3 La didattica della matematica come ars 10
- 1.1.4 Gli strumenti della didattica A 11
- 1.1.5 Limiti della didattica A 19
- 1.1.6 La didattica B 19

1.2 La didattica in aula 21-27

- 1.2.1 Il triangolo della didattica 21
- 1.2.2 Le situazioni didattiche 22
- 1.2.3 Il contratto didattico 25

1.3 Le problematiche della didattica 28-40

- 1.3.1 Introduzione 28
- 1.3.2 Concetti 30
- 1.3.3 Immagini Mentali 31
- 1.3.4 Misconcezioni e Conflitti 32
- 1.3.5 Modelli intuitivi e modelli parassiti 35
- 1.3.6 Ostacoli 36
- 1.3.7 Matematiche 37

CAPITOLO 2 41-60

2.1 Cosa sono le misconcezioni 41-46

- 2.1.1 Introduzione: le misconcezioni 41
- 2.1.2 Errore o Misconcezione? 44
- 2.1.3 La comunicazione come strumento di controllo 46

2.2 Le misconcezioni e il linguaggio 47-54

- 2.2.1 Linguaggio matematico, lingua standard e matematiche 47

2.2.2 Cos'è il linguaggio matematico?	48
2.2.3 Il linguaggio: causa delle misconcezioni	52

2.3 Concetti, immagini e loro rappresentazioni grafiche **55-60**

2.3.1 Immagini, Concetti: misconcezioni in geometria	55
2.3.2 La geometria e le sue rappresentazioni	57
2.3.3 Per concludere	58

CAPITOLO 3 **61-80**

3.1 Iniziamo dalle misconcezioni **61- 66**

3.1.1 Perché le misconcezioni	61
3.1.2 Faccia a faccia con le misconcezioni	63
3.1.3 Ipotesi di progettazione iniziale	65

3.2 Misconcezioni: riconoscimento e riflessioni in aula **67-79**

3.2.1 Il contesto	67
3.2.2 Il progetto didattico	68
3.2.3 Le misconcezioni e il linguaggio	69
3.2.4 Le misconcezioni e la rappresentazione iconografica	76
3.2.5 Le modalità di verifica	78

CAPITOLO 4 **81-84**

4.1 Riflessioni conclusive **81-84**

4.1.1 Confronto con le esperienze precedenti	81
4.1.2 Ringraziamenti	83

ALLEGATI **85-87**

ALLEGATO A: Definizione di punto geometrico	86
ALLEGATO B: Il gioco dell'insegnante	87
BIBLIOGRAFIA	89

Introduzione

Questa tesi nasce dalla necessità di verificare alcune conoscenze acquisite durante il corso di Didattica della Matematica tenuto dal Professore D'Amore. L'interesse sviluppato dalle problematiche presentate dallo stesso e dai suoi collaboratori sta alla base del percorso di tirocinio sostenuto in una scuola elementare.

La finalità di tale percorso è quello di verificare, attraverso un'esperienza diretta e personale quale il tirocinio, i risultati delle ricerche effettuate e/o presentate dal Professore D'Amore.

L'argomento intorno al quale ruota questa tesi è la misconcezione: parafrasando le parole del docente si può pensare alla misconcezione come a un concetto non corretto, errato ma non per questo da considerarsi esclusivamente negativo. La misconcezione, quando riconosciuta, può essere usata quale strategia didattica per far riflettere il bambino sulla propria conoscenza e condurlo verso la costruzione di un nuovo sapere.

Il progetto didattico affrontato durante il periodo di tirocinio prende vita proprio da questo secondo modo di pensare alle misconcezioni: Iniziamo dalle Misconcezioni è il titolo non solo dell'itinerario didattico ma anche di questa relazione di tesi.

La tesi si sviluppa in quattro capitoli:

➔ Il 1° capitolo presenta le tematiche e la problematiche che stanno alla base degli studi di Didattica della Matematica. Questo permette di avere un quadro generale della disciplina: ricerche, dibattiti e nuovi sviluppi nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica.

◆ Con il 2° capitolo si entra nel cuore della relazione di tesi: le misconcezioni sono osservate nel rapporto che instaurano con quelle che possono essere identificate come alcune delle cause principali che le originano.

◆ Il 3° capitolo riporta il percorso di tirocinio “Iniziamo dalle Misconcezioni” presentato a bambini di una scuola elementare.

◆ Nel 4° e ultimo capitolo vi sono le riflessioni sull’esperienza di tirocinio del IV anno e il confronto tra questo e i tirocini precedenti. Non solo: vi sono anche i ringraziamenti verso tutte le persone che in questo, come in altri momenti della mia vita, mi hanno aiutato, sostenuto e incoraggiato credendo in me.

Capitolo 1

1.1 La matematica e la sua didattica

1.1.1 Cos'è la Didattica

È soprattutto a metà del ventesimo secolo che la didattica taglia il proprio cordone ombelicale che la teneva unita alla pedagogia. Al centro della sua attenzione e riflessione vi è l'interazione tra il soggetto e gli oggetti dell'educazione; la sua finalità educativa è di «*mettere-in-comunicazione le dimensioni di sviluppo delle diverse età "generazionali" [...] con i sistemi simbolico-culturali [...] all'interno di ambienti formativi: la famiglia, la scuola, l'associazione, le chiese, le agenzie del tempo libero e della cultura diffusa, et altri.*» [D'Amore, Frabboni (1996), pag.13].

All'interno della realtà "scuola" la didattica si presenta come una medaglia dalla duplice faccia: l'una definita *didattica generale*, l'altra riconosciuta con il nome di *didattica disciplinare*. Quest'ultima pone al centro della propria riflessione il sapere scolastico e le diverse metodologie d'insegnamento e di apprendimento: «*compito della didattica è quello , pertanto, di "ottimizzare" i percorsi di insegnamento-apprendimento a misura del passo di cui dispone ogni allievo*» [D'Amore, Frabboni (1996), pag.14]; la prima, invece, ha come fulcro della propria riflessione «*le due capitali scientifiche del fare-scuola: il modello organizzativo e il modello curricolare [...].*» [D'Amore, Frabboni (1996), pag.13-14].

Frabboni (D'Amore, Frabboni, 1996) per descrivere questi due modelli (organizzativo e curricolare) utilizza la metafora del treno: come il treno è formato da una locomotiva e da vagoni, così i due modelli sono formati da un macroindicatore e da compiti da promuovere e sviluppare. Cinque sono i “vagoni” del modello organizzativo:

1. Sperimentazione: *«promuovere nella scuola uno stile sperimentale significa -per la didattica- prendere le distanze da quelle procedure -strategie- pratiche del “fare-scuola” che vengono rinchiusi e ibernati in metodi.»* [D'Amore, Frabboni (1996), pag.17].
2. Tempi: la scuola deve essere in grado di favorire un'organizzazione oraria ove si tenga conto del *«carico culturale prescritto dai Programmi, delle risorse formative offerte dal territorio in guisa di potenziali aule didattiche decentrate.»* [D'Amore, Frabboni (1996), pag.17-18].
3. Luoghi: interessante è l'immagine offerta da Frabboni in merito: si parla di *“uso poliedrico degli spazi”* [D'Amore, Frabboni (1996), pag.19], di *“ambienti multipli diversamente apparecchiati”* [D'Amore, Frabboni (1996), pag.19] e ancora di ambienti organizzati come ateliers-laboratori...da ciò si evince una grande flessibilità interna alla scuola.
4. Partecipazione: il clima che la didattica è chiamata a promuovere è di tipo democratico; ciò è perseguibile solo se tutti i soggetti (genitori, alunni e insegnanti) possono partecipare attivamente nella realtà scolastica.
5. Integrazione: in questi ultimi anni si parla d'interazione di bambini con handicap e di bambini stranieri (fenomeno sempre più presente in molte classi di qualsiasi grado e livello scolastico). La didattica deve essere in grado di offrire opportunità formative

adatte a queste due “realità”: percorsi formativi, cognitivi e relazionali.

Ciò che traina questi cinque vagoni è l’Autonomia: da questa la didattica può realmente considerarsi scienza della comunicazione.

La “locomotiva” del modello curricolare è il curricolo. Sotto questo termine coesistono diversi significati: può rappresentare “un insieme di esperienze” (per esempio professionali, scolastiche e della vita quotidiana) ma può anche indicare un insieme di proposte -attività atte a far vivere nuove esperienze ai singoli; il curricolo diviene il mezzo attraverso cui una generazione decide quali “esperienze” trasmettere alle generazioni successive. Quindi diviene *«un punto di incontro [...] tra il Programma e la Programmazione.»* [D’Amore, Frabboni (1996), pag.21], dove per programma si intende l’insieme delle competenze che la scuola, di qualsiasi grado e ordine, deve trasmettere e far acquisire.

Dieci sono gli aspetti che il modello curricolare racchiude in sé:

1. Programma: il suo scopo è di individuare gli obiettivi e le finalità dell’azione formativa.
2. Programmazione: con questo termine s’intende un *« “piano-di-lavoro” di plesso formalizzato dal collegio dei docenti come punto di incontro tra i “saperi” prescritti del programma e le “variabili” che siglano la realtà educativa di una sede scolastica [...].»* [D’Amore, Frabboni (1996), pag.21-22].
3. Continuità: una continuità realizzata sia longitudinalmente (che indica il passare da un livello scolastico al successivo) che trasversalmente (ovvero un’interazione tra scuola e altre agenzie formative, spesso definite con il termine extra-scuola).
4. Collegialità: con questo termine si indica l’insieme delle relazioni tra insegnanti e alunni, insegnante-insegnante e alunno-alunno.

5. Ambiente: «*la didattica ha il compito di far sì che la scuola innalzi molti ponti verso il “fuori-scuola”.*» [D’Amore, Frabboni (1996), pag.27]. Il *fuori-scuola* sono le agenzie formative che esistono intorno alla scuola.
6. Insegnamento: con questo termine si indica l’insieme delle strategie adottate dall’insegnante con lo scopo di far apprendere nuove competenze agli alunni.
7. Apprendimento: lo studente è posto davanti a due modalità organizzatrici del sapere; entrambe hanno la finalità di far apprendere nuove competenze e conoscenze ma le strategie adottate sono diverse.
8. Contesto: due sono i contesti della scuola: la classe e l’interclasse. La prima rimanda a «*procedure individualizzate dei processi di insegnamento/apprendimento, a condizione che accenda dis-coversa alla pratica dei gruppi a livello.*» [D’Amore, Frabboni (1996), pag.32]. La costruzione di questi *gruppi di livello* si può considerare un fattore positivo per l’apprendimento solo nel momento in cui tali gruppi sono mutabili e variabili. L’interclasse rimanda all’organizzazione di classi aperte in modo da costruire una «*scuola sempre più dei laboratori*» [D’Amore, Frabboni (1996), pag.33].
9. Laboratorio: due sono i campi d’azione dei laboratori; questi possono essere pensati e organizzati al fine di integrare le discipline (come per esempio: laboratori di lingue, di scienze...); ma possono anche essere multidisciplinari come quelli ambientali e teatrali.
10. Valutazione: la valutazione scolastica si può suddividere in tre momenti principali: “diagnostico”, “in itinere” e “sommativo”. Per spiegare in cosa consistono mi avvalgo delle parole di un

docimologo: *«all’inizio di ogni attività formativa, per esempio agli esordi di un anno scolastico, occorre sviluppare interventi di verifica capaci di dar corso a una vera e propria valutazione diagnostica dei prerequisiti cognitivi e affettivo-motivazionali [...]. Durante il processo di insegnamento/apprendimento la valutazione formativa consentirà l’identificazione, in itinere appunto, [...] dei punti deboli e di quelli forti degli allievi [...]. La valutazione sommativa assolve invece di bilancio consuntivo, [...] , dell’attività scolastica e degli apprendimenti che essa ha promosso nell’allievo.»* [Domenico (2001), pag.42 e seguenti].

1.1.2 Didattica generale e Didattica disciplinare

Prima si è accennato alla doppia identità della didattica: Didattica generale e Didattica disciplinare. Da questa doppia “personalità” prende vita un profondo dibattito, ancora oggi insoluto, sulla “legittimità” dell’una piuttosto che dell’altra. Tre sono i punti fondamentali sui quali poggia il dibattito: la legittimità, l’epistemologia e la formazione.

Il primo punto riguarda la legittimità dell’esistenza di una delle due “Didattiche”, e si può riassumere con questi due punti di vista, [D’Amore (1994), pag.28]:

Non esiste una “Didattica generale”. Esistono solo delle didattiche *di qualche cosa*. Altrimenti si rischia di parlare a vuoto di nulla.

Non esiste una “Didattica specifica” per ogni disciplina. Esiste invece una “Didattica generale”: le didattiche specifiche sono segmenti di una didattica generale. Le problematiche della didattica sono sempre quelle: a seconda della disciplina specifica vi saranno peculiarità, ma nel secondo ordine, quasi irrilevanti.

Il dibattito sembra nascere dalle diverse interpretazioni riguardanti il termine *Didattica*, che può essere considerata sia come “teoria della

didattica” ma anche secondo un senso teorico-filosofico e infine come «qualcosa di molto più specifico» [D’Amore (1994), pag.28].

D’Amore (D’Amore, Frabboni (1996) pag.119) riconosce che vi sono problematiche che vanno oltre le didattiche specifiche come per esempio la capacità di condurre lavori di gruppo...

Si viene così a creare una teoria della didattica che non ha nulla a che fare con le didattiche specifiche. Ma è anche vero che alcune strategie d’insegnamento dipendono dall’immagine che la materia proietta (anche se spesso è l’immagine che l’insegnante ha della materia ad essere proiettata). Lo stesso autore definisce la Didattica generale «un ampio terreno di studio e ricerca, alimentato dalle “Didattiche specifiche”: i problemi di queste ultime, ogni volta che sono generalizzabili, costituiscono oggetto di studio e ricerca all’interno della “Didattica generale”.» [D’Amore (1994), pag.29].

Il secondo punto che divide gli studiosi è la presenza o meno di uno statuto epistemologico, [D’Amore (1999), pag. 377]:

Solo la didattica specifica ha un suo significativo statuto epistemologico. La didattica generale è priva di epistemologia: essa prende in prestito brandelli di epistemologie dalle singole materie.

Solo la didattica generale ha un suo significativo statuto epistemologico. Quello delle didattiche specifiche coincide con la epistemologia della materia che ne costituisce il suo oggetto.

Alla base della controversia sta il significato del termine “epistemologia” che può assumere almeno tre diverse connotazioni:

1. Epistemologia delle discipline in sé: è il risultato di scoperte e di ricerche effettuate da uomini che hanno dato vita alle discipline stesse.
2. Epistemologia delle “Didattiche specifiche”: l’attenzione è rivolta al soggetto dell’insegnamento, al didatta e al sapere della

disciplina piuttosto che verso il ricercatore, la ricerca e la disciplina stessa.

3. Epistemologia della “Didattica generale”: dipende dalle scelte che stanno alla base della didattica (euristica, filosofica,...).

Dopo aver evidenziato queste tre definizioni la contrapposizione tra didattica generale e didattica specifica sfuma: *«Vi sono statuti epistemologici significativi diversi, non riconducibili l'uno all'altro, tutti decisamente importanti, con diverse accezioni dell'aggettivo “epistemologico”»* [D'Amore (1994), pag. 30-31].

L'ultimo punto del dibattito riguarda la formazione che si interpreta in queste due affermazioni, [D'Amore (1994), pag. 31]:

La “Didattica generale” è un serbatoio di (banali) atteggiamenti psico-pedagogici che è perfettamente rimpiazzabile dal buon senso, dall'entusiasmo, da una solida preparazione disciplinare, da un po' di sensibilità, da una forte motivazione ad insegnare....

La “Didattica specifica” coincide con la disciplina che ha come oggetto; per esempio, la “Didattica della Matematica” coincide con la Matematica. La preparazione dell'insegnante (*in quanto tale*) è dunque legata alla sua sola formazione in “Didattica generale”, avendo dato per scontata la preparazione in una disciplina.

La preparazione del didatta sulla disciplina è senza dubbio necessaria anche se ciò non basta: *«una saggia via di conciliazione prevede dunque una solida preparazione culturale ed una altrettanto solida preparazione nel campo educativo. Visto che esiste una “didattica generale” ad essa si deve ricorrere per la preparazione professionale del docente. Visto che esiste una “didattica specifica” che NON è la materia, essa deve essere bagaglio professionalizzante del docente.»* [D'Amore, Frabboni (1996), pag. 124].

1.1.3 La Didattica della matematica come Ars

In D'Amore (1999) emergono due diverse prospettive che descrivono la didattica della matematica: denominate rispettivamente “DIDATTICA A” e “DIDATTICA B”. Pur essendo l'una l'evoluzione dell'altra, le due prospettive sono tra loro molto diverse, a causa del diverso obiettivo e oggetto di studio. La didattica di tipo A (dove A sta per Ars docendi) può essere definita come “divulgatrice di idee”; la didattica B come “epistemologia dell'apprendimento”.

Iniziamo con l'analizzare la didattica A. L'oggetto di lavoro del didatta A è l'insegnamento della matematica: pur essendo l'alunno al centro della sua attenzione, l'azione didattica è rivolta all'argomento e di conseguenza alla sua “presentazione”. L'obiettivo di questa prima tipologia è creare situazioni tali da migliorare l'insegnamento della matematica: *«l'assunto più o meno esplicito sembra essere il seguente: se migliora l'insegnamento, migliorerà anche l'apprendimento.»* [D'Amore, Frabboni (1996), pag. 90].

Per migliorare l'insegnamento e, di conseguenza, creare un proficuo apprendimento, il didatta A si avvale di strumenti matematici e di attività atte al raggiungimento di tale scopo.

Nella didattica A rientrano alcune attività che utilizzano la storia della matematica a fine didattico:

- La prima è chiamata “Storia”: l'analisi critica dell'evoluzione delle idee rappresenta un argomento *«d'interesse da privilegiare se non proprio per lo studente [...] almeno per l'insegnante.»* [D'Amore (1999), pag. 37]; e da questa il didatta può maturare riflessioni scientifiche, epistemologiche, nonché didattiche.

- La seconda è definita “storia”: lo sviluppo dei fatti permette di studiare e apprendere i cambiamenti avvenuti nel corso dei secoli, nella matematica, e quindi permette di capire quella di oggi;
- L’ultima “storia aneddotica”: questa attività affascina e coinvolge nell’attività di apprendimento gli studenti stessi: « [...] *i matematici, personaggi che dedicano la loro vita a qualche cosa che per i più è misterioso, sono esseri umani che hanno una storia personale [...] ciò li rende meno estranei agli studenti [...]*». [D’Amore (1999), pag. 38].

Un esempio molto interessante di questo terzo aspetto è quello fornito da D’Amore (1999); l’autore racconta ai bambini di una IV elementare la storia di Federico Gauss, un bambino tedesco della loro stessa età, che risolse un problema aritmetico inventandosi un metodo di risoluzione molto rapido: il problema consegnatogli dal maestro consisteva nel calcolare la somma di tutti i numeri da 1 a 100 $\rightarrow 1+2+3\dots 99+100$.

I bambini, dopo aver ascoltato il metodo scoperto dal loro coetaneo, hanno inventato altre soluzioni per emulare Gauss.

L’aneddoto si è dimostrato un ottimo stimolo per i bambini poiché li ha spinti verso l’apprendimento di una nuova conoscenza.

1.1.4 Gli strumenti della Didattica A

Come accennato in precedenza, il didatta A ha come scopo il miglioramento dell’insegnamento; per realizzare ciò si avvale di alcuni materiali strutturati. Numerosi sono questi materiali: di seguito ne verranno analizzati solo alcuni e descritti brevemente nella struttura e nell’obiettivo per il quale sono utilizzati.

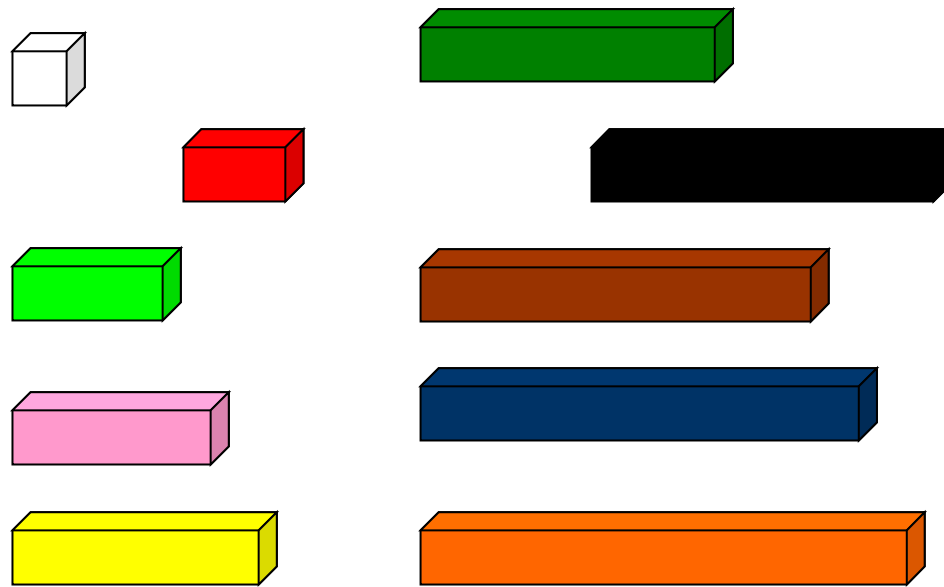
❖ I Numeri in Colore:

Il padre dei numeri in colore è Giorgio Cuisenaire, insegnante belga. Dal Belgio questo materiale si è diffuso in tutti i Paesi Europei ed Extra Europei grazie ad un professore universitario di matematica e psicologia: Galeb Gattegno.

Nelle scuole di oggi questi oggetti (si tratta di parallelepipedi e cubi di plastica colorata) sono anche chiamati “regoli”. Lo scopo di questo strumento è la rappresentazione del numero attraverso il materiale: ogni parallelepipedo rappresenta un numero compreso tra 2 e 10, mentre l’unità, che equivale al numero 1, da un cubetto. Attraverso questi regoli, due sono le sollecitazioni visive esercitate nell’apprendimento del “concetto” di numero: l’altezza -o lunghezza- del regolo e il colore.

Occorre sottolineare che nell’uso dei “Numeri in colore” l’aspetto cardinale del numero ricopre un posto privilegiato rispetto a quello ordinale che rischia di venir trascurato: *«Si perde qualcosa nell’approccio ordinale, ma forse lo si recupera con opportune attività di conteggio.»* [D’Amore (1999), pag.40].

Questo materiale è spesso adoperato nel primo ciclo della scuola di base per far esercitare i bambini sull’addizione e sulla sottrazione. Può accadere che quando viene chiesto ai bambini di effettuare una operazione con i regoli, ad esempio $10-9$, i bambini rispondano “arancione-blu=bianco”: i bambini riscontrano una difficoltà nell’estrarre la regola numerica dall’aspetto cromatico del materiale.



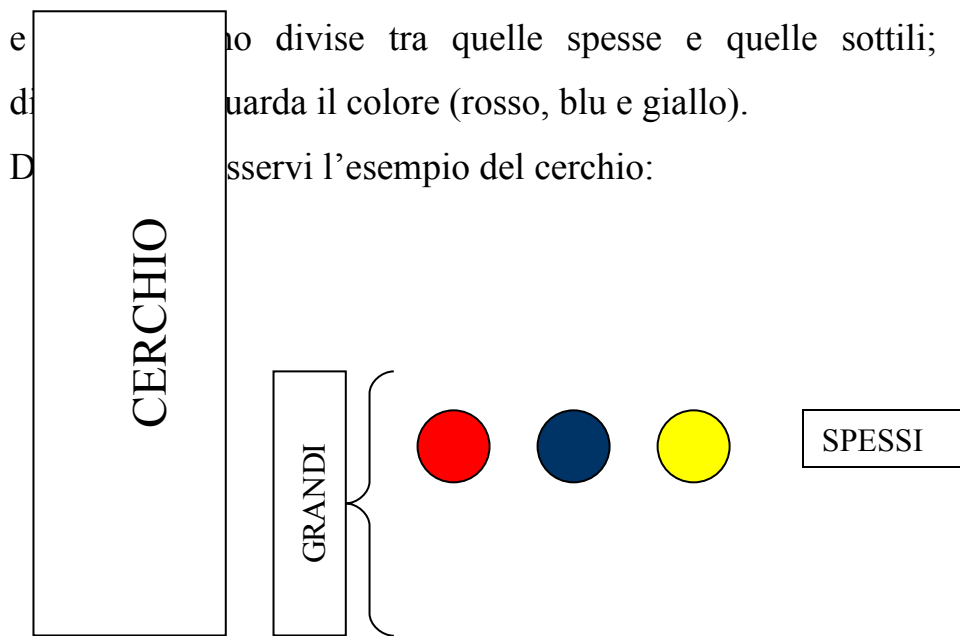
❖ I Blocchi Logici:

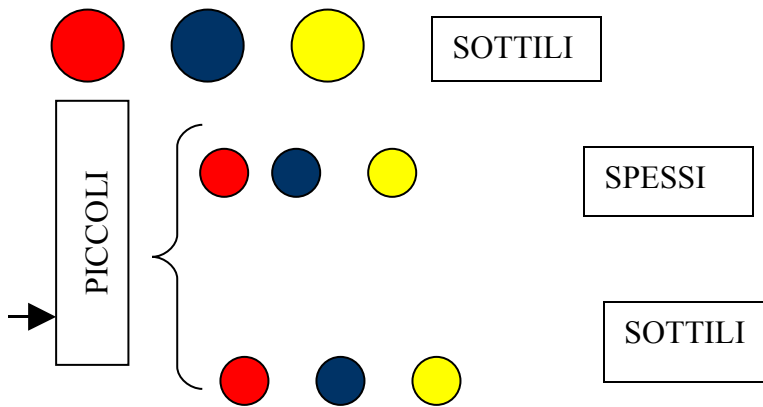
Si tratta di una serie di forme (quadrati, rettangoli, cerchi, triangoli...) che hanno differente grandezza, spessore e colore. Le attività suggerite da questo materiale riguardano giochi-attività sulla logica. L'obiettivo di questo strumento è quello di sviluppare capacità di astrazione e di effettuare alcune operazioni logiche.

I blocchi logici sono quarantotto e come abbiamo già detto ci sono quattro tipi di figure: quadrati-rettangoli-cerchi-triangoli; ognuno di essi è suddiviso in figure grandi e figure piccole; a loro volta le figure grandi

e sono divise tra quelle spesse e quelle sottili; un'ultima differenza riguarda il colore (rosso, blu e giallo).

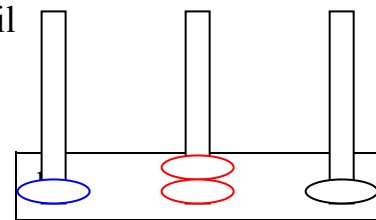
Di seguito osservi l'esempio del cerchio:





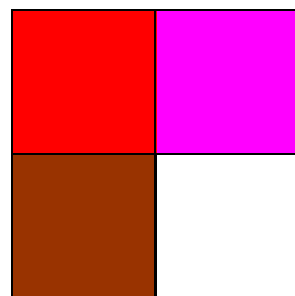
❖ Abaco multibase:

L'abaco multibase è uno strumento usato soprattutto con lo scopo di far conoscere ai bambini basi diverse dalla dieci. Questo strumento oggi è ancora presente nelle scuole elementari: aprendo i quaderni dei bambini della scuola di base a volte lo si può incontrare rappresentato attraverso il disegno. Molto spesso l'abaco è oggi impiegato per far apprendere ai bambini il valore posizionale.



❖ Il Minicomputer:

Uno strumento simile all'abaco, non per forma ma per contenuto, è il minicomputer. Questo strumento è stato ideato da Georges Papy.



Consiste in un quadrato suddiviso, attraverso le due mediane, in quattro parti uguali. L'obiettivo

è, anche in questo caso, quello di far apprendere, attraverso il gioco, la numerazione con basi diverse da quella convenzionale. Il colore dei quattro *quadratini* corrisponde a quello dei regoli.

❖ Trimath e i Blocchi Aritmetici Multibase (B.A.M.):

I primi sono degli strumenti didattici proposti da Dienes che ripropongono la numerazione in base tre; i secondi sono degli strumenti in legno che presentano, oltre alla base tre, anche altre basi come due, quattro, cinque... e la dieci.

Si considerino gli elementi della base tre per entrambi gli strumenti.

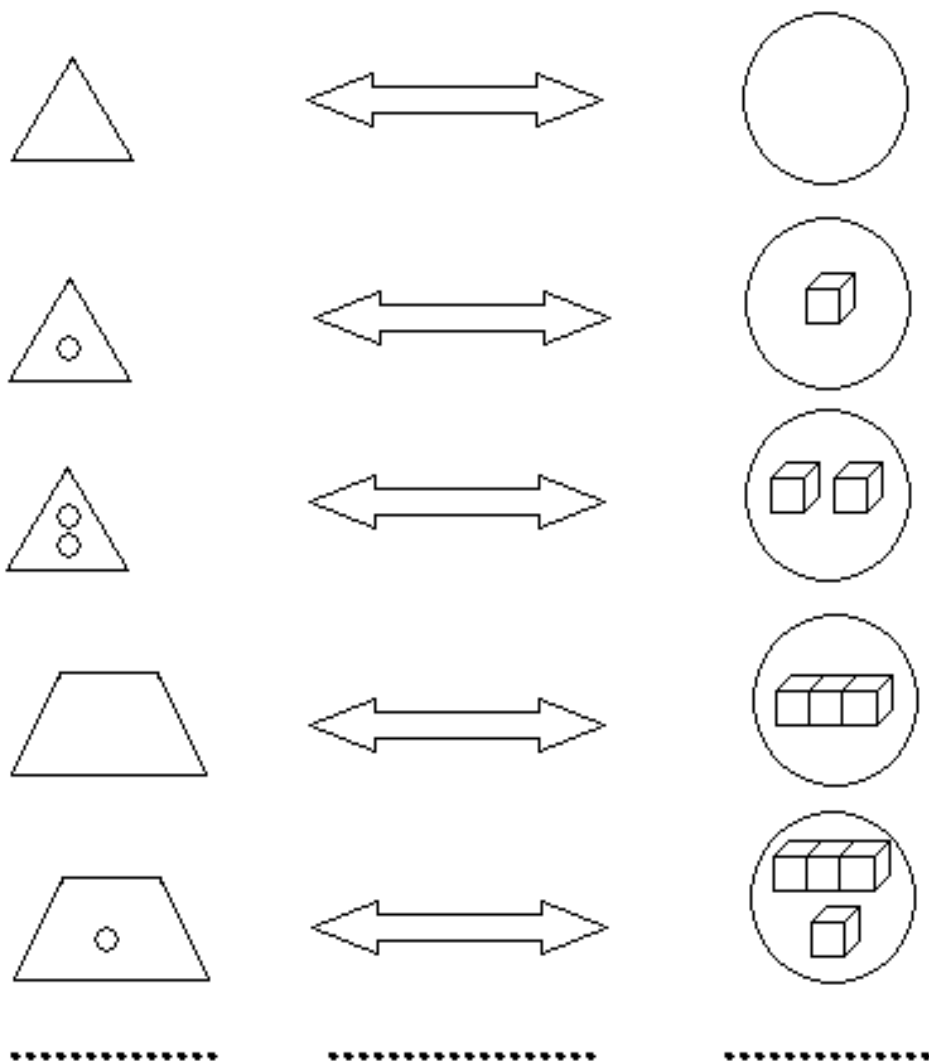
Per quanto riguarda i B.A.M. i materiali rappresentanti la base tre sono:

- un unità o cubetto
- una base o lungo
- un quadrato o piatto
- un cubo o blocco di tre.

I due materiali approdano nella didattica nello stesso periodo.

Il confronto tra i due ha l'unico scopo di accostare due strumenti che hanno lo stesso obiettivo: presentare al bambino numerazioni in basi diverse.

Di seguito si osservi i trimath -a sinistra- confrontati con i blocchi logici -a destra-:



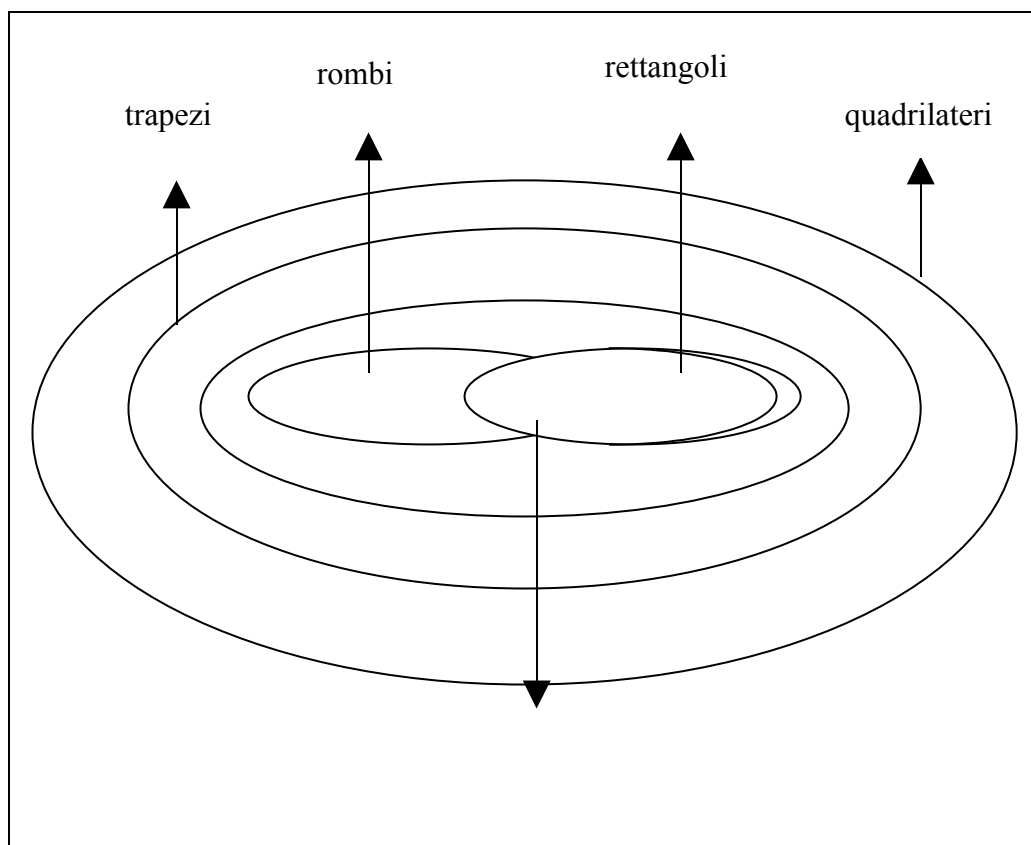
❖ Laboratorio di Matematica:

Si tratta di atelier didattici nei quali gli alunni costruiscono oggetti matematici. La possibilità offerta da questi atelier è quella di apprendere facendo; gli studenti hanno la possibilità di costruirsi il sapere attraverso attività laboratoriali. Questo modo di far didattica “imparare-facendo” rimanda alla pedagogia attiva. Si tratta di un apprendimento concreto che sia sul piano didattico che sul piano cognitivo offre al soggetto indubbi successi nell’acquisizione di conoscenze e abilità.

In Caldelli, D’Amore (1986) sono riportate molteplici attività laboratoriali, una fra tutte quello riguardante i quadrilateri. La

classificazione dei quadrilateri è presentata nei libri e nei manuali scolastici attraverso una rappresentazione grafica: il diagramma di Eulero-Venn, [Fandiño Pinilla, Sbaragli (2001), pag.92]:

quadrati
parallelogrammi



L'alunno, posto davanti a questa rappresentazione, potrebbe non cercare di indagare ciò che rappresenta, ma limitarsi a studiarla a memoria e ben presto dimenticarla.

L'attività proposta dai laboratori-atelier ha lo scopo di far giungere gli alunni stessi alla costruzione della classificazione dei quadrilateri.

Questa esperienza didattica rimanda alla pedagogia attiva. Questi gli obiettivi dell'attività [Caldelli, D'Amore (1986), pag.64]:

1. «Conoscenza delle denominazioni e delle definizioni dei quadrilateri più comuni, non solo in base a proprietà "statiche" ma anche "dinamiche"»

2. *«Capacità di riconoscere il seguente fatto logico: che all'aumentare delle proprietà richieste per una figura ne diminuisce l'estensione logica, cioè la scelta si restringe.»*
3. *«Capacità di inserire, all'interno di un insieme già denominato, un sottoinsieme per l'aggiunta di un'ulteriore proprietà, e viceversa.»*
4. *«Saper descrivere il diagramma di Eulero-Venn dei quadrilateri convessi.»*

Tale esperienza didattica consta di cinque fasi, la prima delle quali dedicata all'insieme dei rombi e al rispettivo sottoinsieme: il quadrato.

Si fanno costruire agli alunni dei quadrilateri con quattro listelli della stessa lunghezza fermati all'estremità con dei fermacampioni. Gli alunni agiscono sulla figura deformandola: *«La figura che si ottiene è deformabile con una leggera pressione su uno dei vertici o uno dei lati: in tale deformazione si ottengono con continuità tanti quadrilateri di uguale perimetro, aventi la proprietà di avere tutti i lati congruenti; si ottengono cioè tanti rombi.»* [Caldelli, D'Amore (1986), pag.65].

Osservando con molta attenzione emerge uno speciale rombo che, oltre ad avere tutti i lati congruenti, ha anche tutti e quattro gli angoli retti: un quadrato. Questa attività permette di far ragionare gli studenti sulle caratteristiche delle figure e dei loro legami logici.

Questi laboratori-atelier rappresentano un vero e proprio ponte tra la didattica A e la didattica B: *« Poiché lo strumento matematico non era, come di consueto, del tutto realizzato da un adulto e portato in classe già confezionato e pronto per l'uso, bensì solo proposto dall'insegnante attraverso il bisogno di rendere concreta un'idea, ma poi progettato, realizzato e verificato dall'allievo, si potrebbe anche pensare che questa attività costituisca un "ponte" tra tipologia A e quella B [...]».* [D'Amore (1999), pag. 40].

1.1.5 Limiti della Didattica A

Gli strumenti della didattica A presentati (tranne i laboratori di matematica) hanno l'*handicap* di costruire «*ambienti artificiali*» [D'Amore (1999), pag. 44]: l'allievo non acquisisce la matematica che lo strumento vuole trasmettere ma impara a giocare con il materiale didattico.

Ciò che il didatta deve evitare è che l'apprendimento, acquisito con l'aiuto di questi strumenti, sia fine a sé stesso. Il bambino deve essere in grado di trasferire il sapere appreso da una situazione ad un'altra.

Questo "passaggio" è definito TRANSFER COGNITIVO: «*da una conoscenza "artificiale" costruita su misura in un ambiente opportuno e specifico, alla conoscenza, generalizzata, cioè alla capacità di produrre abilità cognitive e procedurali in altre situazioni*». [D'Amore (1999), pag. 44].

1.1.6 La Didattica B

I dubbi sulla didattica A, sull'uso dei materiali strutturati e sull'effettivo transfer cognitivo, hanno condotto verso una ricerca empirica su di essa: «*Senza una vera e propria ricerca empirica, qual è la certezza che abbiamo sul fatto che l'uso di uno strumento qualsiasi tra quelli descritti nella tipologia A renda gli allievi più abili in qualche cosa che non sia meramente specifico?*» [D'Amore, Frabboni (1996), pag. 98]. Nel momento in cui si effettuano studi empirici sui risultati di tipo cognitivo, ottenuti attraverso le attività della didattica A, si può parlare

di vere e proprie ricerche empiriche, quindi di studi sull'epistemologia dell'apprendimento: nasce la Didattica di tipo B.

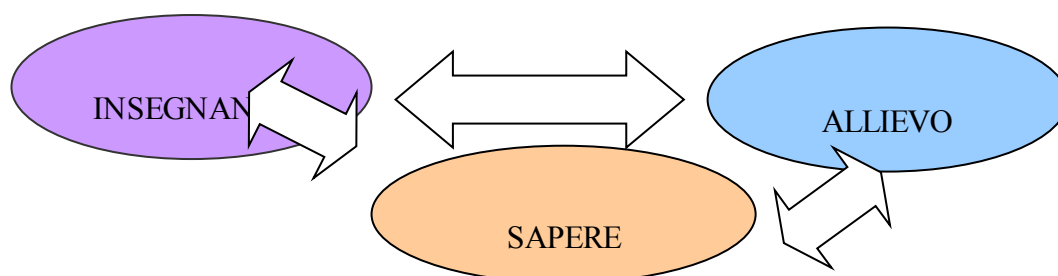
Il didatta B pone tutta la sua attenzione sull'apprendimento e di conseguenza sull'alunno stesso: avendo come oggetto di studio l'apprendimento concreto e reale, si pone delle domande sull'effettiva acquisizione di un sapere conseguito con l'uso di un determinato strumento, come quelli descritti nella tipologia A.

Per esempio: l'uso dei blocchi logici per far apprendere la logica porta realmente il bambino a costruire un sapere o crea un apprendimento artificiale? Il bambino riesce a generalizzare il sapere appreso durante le attività-gioco e a trasferirlo in altre situazioni didattiche fino alla sua astrazione?

Negli ultimi anni si sono affacciate, sullo scenario della didattica, molte problematiche che sono diventati dei veri e propri «*elementi di ricerca B*» [D'Amore, Frabboni (1996), pag. 99]: queste tematiche sono affrontate e approfondite nei due paragrafi seguenti.

1.2 La didattica in aula

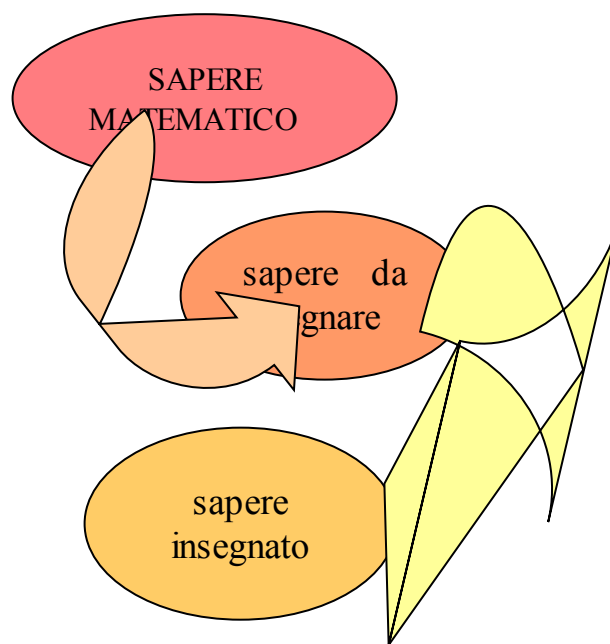
1.2.1 Il triangolo della didattica



Questo schema è stato ideato da Yves Chevallard. Descrivendolo brevemente si nota subito che i tre soggetti, che interagiscono in una azione didattica, dipendono gli uni dagli altri.

Esaminiamo la figura dell'insegnante nel suo rapporto con il sapere prima e con l'alunno poi. L'insegnante, per far giungere il sapere all'alunno, deve "operare una trasposizione didattica" di ciò che nello schema è indicato con il termine "SAPERE":

«La trasposizione didattica consiste nell'estrarre un elemento di sapere dal suo contesto (universitario, sociale, eccetera) per ricontestualizzarlo nel contesto sempre singolare, sempre unico, della propria classe.» [D'Amore (1999), pag.224].



“Operare una trasposizione didattica” quindi vuol dire operare una azione creativa: il sapere matematico deve essere adattato alla realtà della classe. Può apparire implicito, ma occorre sottolineare che

trasformare il sapere matematico non è sinonimo di “banalizzazione del sapere”.

Passare da un Sapere alto, colto, accademico ad un sapere da insegnare implica un lavoro da parte dell'insegnante, un'analisi accurata della noosfera intesa come: « *l'intermediario tra il sistema scolastico (e le scelte dell'insegnante) e l'ambiente sociale più esteso (esterno alla scuola)*» [D'Amore (1999), pag.221].

Una volta operata questa prima trasposizione, il didatta deve trasformare il sapere da insegnare in sapere insegnato: ovvero deve essere in grado di modellare il sapere alla realtà della classe.

1.2.2. Le situazioni didattiche

Brousseau (1986) ha sviluppato la cosiddetta TEORIA DELLE SITUAZIONI; con questa teoria l'autore descrive e analizza tre metodologie di apprendimento in classe. Le tre situazioni sono qui presentate attraverso tre esempi.

La prima tipologia si definisce con il termine “NON DIDATTICA”. Si pensi ai bambini che giocano, durante la ricreazione, con il tangram: l'insegnante non ha finalizzato tale “attività-gioco” all'apprendimento di un sapere, ma ciò non esclude che i bambini apprendono una qualche nozione specifica.

La seconda situazione è definita “DIDATTICA” e può essere così descritta: l'insegnante definisce sia l'ambiente che le attività al fine di far raggiungere determinati obiettivi ai bambini: per esempio, vengono distribuiti degli abachi multibase per imparare a contare in basi diverse da quella convenzionale. Le regole sono esplicitate dall'insegnante e

acquisite dai bambini senza una loro implicazione nel processo di apprendimento.

Davanti a una situazione didattica simile a questa non si può non parlare di contratto didattico...Ma questo tema verrà affrontato in seguito.

L'ultima delle tre situazioni è definita "A-DIDATTICA": per spiegarla è riportato il seguente gioco.

L'insegnante vuole far apprendere ai bambini una nuova operazione, la sottrazione, e per fare ciò può seguire due strade: l'una presentando l'operazione, le sue regole e le sue applicazioni ai bambini (situazione didattica); l'altra devolvendo il sapere nelle mani degli alunni, proponendo un gioco ai bambini: "la corsa al 7". Questo gioco rappresenta un'attività finalizzata all'apprendimento della sottrazione. Lo scopo è quello di arrivare al 7 addizionando solo il numero 1 o 2. Riproponendo il gioco più volte ci si rende conto che solo chi arriva per primo al numero 4 vince, ma non solo: per vincere occorre ragionare operando addizioni e sottrazioni.

Affinché il bambino costruisca la propria conoscenza deve giungere alla soluzione del problema¹ utilizzando apprendimenti precedenti o "escogitando" situazioni nuove. L'insegnante **devolve** il sapere nelle mani degli alunni: *«La devoluzione è il processo o l'attività di responsabilizzazione attraverso i quali l'insegnante ottiene che lo studente impegni la sua propria responsabilità nella risoluzione di un problema (più in generale: in un'attività cognitiva) che diventa allora*

¹ In D'Amore (1999) l'autore distingue ESERCIZIO da PROBLEMA:

→ l'esercizio prevede un uso, da parte dell'alunno, di conoscenze e competenze apprese precedentemente: queste vengono a consolidarsi attraverso la presentazione e la risoluzione di esercizi.

→ del tutto differente è lo scopo perseguito dall'uso di problemi: qui l'alunno si trova a dover "escogitare" una risoluzione creativa: *«Si ha invece un problema quando una o più regole o una o più procedure non sono ancora bagaglio cognitivo del risolutore; alcune di esse potrebbero essere proprio in quell'occasione in via di esplicitazione; a volte è la successione stessa delle operazioni risolventi a richiedere un atto creativo da parte del risolutore.»* [D'Amore (1999), pag.284].

problema dell'allievo,[...].» [D'Amore (1999), pag.78]. Facendo ciò l'alunno **implica** sé stesso nell'attività d'apprendimento. Dedicandosi alla risoluzione del problema il bambino costruisce un sapere personale che condivide con i compagni operando una **socializzazione del sapere**. I bambini discutono confrontando le loro ipotesi, costruendo un nuovo sapere comune: questo processo è definito **validazione**. L'ultima fase è chiamata "**istituzionalizzazione**": i bambini rivolgono il loro nuovo sapere alla figura istituzionale -appunto-, di riferimento, ovvero l'insegnante.

Confrontando la situazione didattica con quella a-didattica si possono operare almeno due osservazioni:

1. In entrambi i casi emerge la volontà, da parte del didatta, di far apprendere agli alunni una nuova conoscenza, esplicita nel primo caso, implicita nel secondo; quindi le finalità didattiche d'apprendimento sono raggiunte in entrambe le situazioni.
2. Ciò che distingue le due situazioni è la posizione dell'alunno di fronte al sapere. Nel primo caso il bambino "subisce" l'apprendimento; nel secondo caso il bambino è chiamato ad agire su di un nuovo sapere: ciò permette di procedere con prove ed errori e di confrontarsi non più solo con un sapere "adulto" ma con quello dei coetanei.

1.2.3 Il contratto didattico

Guy Brousseau (1986) fu il primo, tra gli anni '70 e '80, a lanciare l'idea di contratto didattico e a definirlo come un insieme di regole- soprattutto implicite- che guidano le relazioni interne alla classe (rapporto insegnante/i-alunno/i).

D'Amore, interpretando la teoria di Brousseau, definisce il contratto didattico come *«un insieme di regole, di vere e proprie clausole; il più delle volte non esplicite [...] create dalle menti dei personaggi coinvolti nell'azione didattica [...] che organizzano le relazioni tra il contenuto insegnato, gli alunni, l'insegnante e le attese (generali o specifiche) all'interno della classe nelle ore di matematica»*. [D'Amore (1999), pag.114].

Una barca misura 37 metri di lunghezza e 5 di larghezza.

Qual è l'età del capitano?

Godino (1991) riporta l'enunciato di questo problema e descrive il comportamento degli alunni di fronte a questo. Molti bambini cercano di dare una risposta alla domanda trasferendo i saperi passati nella nuova situazione.

Un pastore ha 12 pecore e 6 capre.

Quanti anni ha il pastore?

Anche questo problema, come quello del capitano, induce i bambini a trovare una soluzione al problema e quindi a rispondere alla domanda basandosi sulle conoscenze apprese in situazioni didattiche.

La necessità di trovare la risposta al problema può essere considerata come una clausola del contratto didattico: non necessariamente esplicitata dall'insegnante ma ricavata dagli alunni attraverso attività proposte in classe ai bambini. Gli alunni sono da considerarsi come dei veri e propri ricercatori di regole implicite: se l'insegnante ha proposto sempre e solo esercizi con risoluzione, i bambini ne deducono che ogni esercizio-problema implichi una sua soluzione.

Un'altra clausola del contratto didattico è chiamata "delega formale" e per spiegarla è riportato il testo di un problema di Alan Schoenfeld (1987), criticamente analizzato in D'Amore (1999).

Un pullman dell'esercito può trasportare 36 soldati. La domanda è: se i soldati da trasportare sono 1128, quanti pullman occorrono?

Questo problema è stato proposto a ragazzi di vari livelli scolastici, ai quali non è stato negato l'uso della calcolatrice.

Le risposte dei ragazzi alla domanda del problema sono state soprattutto:

- 31,3333
- 31,3 periodico
- 31,3

Pochi sono stati gli studenti che hanno scritto 32.

Da ciò si evince che gli studenti, dopo aver individuato l'operazione da utilizzare per la risoluzione, delegano ogni responsabilità della risposta al problema all'algorithm o alla calcolatrice: *«lo studente legge il testo, decide che l'operazione da effettuare è la divisione [...] a qual punto scatta la clausola di delega formale: non tocca più allo studente ragionare e controllare; sia che faccia i calcoli a mano, tanto più se fa uso della calcolatrice, si instaura la clausola di delega formale che... disimpegna le facoltà razionali, critiche, di controllo: l'impegno dello studente è finito ed ora tocca all'algorithm o meglio ancora alla macchina; il compito successivo dello studente sarà quello di trascrivere*

il risultato, qualsiasi cosa sia e non importa che cosa esso significhi.»
[D'Amore (1999), pag.110-111].

Fino ad ora si è parlato di un contratto didattico appartenente alla realtà quotidiana della classe. Riassumendo: esso rappresenta un insieme di comportamenti e attese appartenenti alla realtà di una determinata classe, risultato dell'interazione tra i personaggi principali: insegnante, alunni e sapere.

Quando un ricercatore entra nella realtà della classe la sua presenza può modificare le relazioni interne. Le risposte date dagli studenti al ricercatore, esterno alla quotidianità della classe, sembrano legate a clausole appartenenti a un contratto didattico sperimentale.

In alcune occasioni la figura dello sperimentatore coincide con quella dell'insegnante. Maria Luisa Schubauer- Leoni (Schubauer- Leoni, Ntamakiliro, 1994) si è dedicata a questa problematica. Secondo l'autrice la differenza di fondo, tra contratto didattico e contratto sperimentale, sta nelle intenzioni e nelle finalità che lo sperimentatore/insegnante attribuisce alla situazione da osservare.

1.3 Le problematiche della didattica

1.3.1. Introduzione

Questo paragrafo ha il compito di introdurre problematiche tanto affascinanti quanto complesse.

Gli argomenti sono presentati in modo da fornire le informazioni principali di ognuno di essi. Farò riferimento e riporterò molti esempi tratti da D'Amore (1999), i quali si riferiscono a ricerche ed esperienze della realtà scolastica.

Per capire gli argomenti che saranno trattati, è necessario immaginarsi cosa avviene, nella mente di un bambino/alunno, durante i diversi momenti di apprendimento.

I bambini, durante le ore di matematica, sono posti di fronte a dei saperi “nuovi”, per esempio quelli inerenti al punto geometrico.

All'alunno sono forniti numerosi elementi riguardanti questo argomento, sia dal manuale che dall'insegnante. È con questi elementi che l'alunno si costruisce il **concetto** di punto matematico e se ne fa un'**immagine**. Nel corso degli anni scolastici il bambino raccoglie tante informazioni e dati riguardanti l'ente geometrico: queste sollecitano l'alunno a rielaborare continuamente le immagini costruite.

Nel momento in cui non pervengono più nuove informazioni, su di esso, nella mente dell'alunno si crea il **modello mentale** di punto geometrico.

Al modello si può pensare come ad un «*insieme delle immagini mentali elaborate (più o meno coscientemente) e tutte relative ad uno stesso concetto [...].*» [D'Amore (1999), pag.151].

Numerose sono le informazioni che pervengono all'alunno e tra queste una ve ne è una sulla quale occorre prestare molta attenzione: la

rappresentazione grafica del punto geometrico con un piccolo segno tondo lasciato dalla punta della penna o della matita. Questa immagine è in realtà una misconcezione: la descrizione che i manuali e i didatti danno di punto geometrico si riferisce da un ente privo di dimensioni. Nel momento in cui si rappresenta il punto geometrico sempre con un piccolo segno come questo \cdot si rischia di passare un'informazione errata. I bambini sviluppano la convinzione che il punto in geometria è un *segnetto* piccolissimo.

A testimoniare, le risposte date dagli studenti (dalla scuola di base alle scuole medie superiori) che, immaginando di spiegare il punto geometrico ad un compagno, hanno così risposto, [Sbaragli (2003), pag.164]:

- *«Io penso che il punto matematico sia un punto che fa finire una frase matematica anche per fare finire i numeri»* (Terza elementare);
- *«Non si sa ancora bene che cos'è un punto però per me è solo un punto su un foglio che può essere di diverse dimensioni»* (Quarta elementare);
- *«Un punto in matematica è importante per poter prendere un voto per essere felici»* (Prima media);
- *«È un punto rotondo che forma le linee»* (Terza media);
- *«Un punto minimo \cdot »* (Quarta liceo scientifico).

Queste sono solo alcune tra tante risposte date ma bastano per fare una considerazione: gli studenti hanno una grande confusione sul significato di punto geometrico, confusione dettata almeno da tre fattori:

- la differenza tra significato che la parola punto assume in matematica e negli altri contesti;
- la convinzione che il punto geometrico corrisponda ad una specifica rappresentazione grafica;

- come l'insegnante ha proposto l'argomento punto: se la misconcezione è insita nella mente dell'insegnante si può dedurre che la stessa viene trasmessa agli alunni.

Le convinzioni insite negli insegnanti diventano bagaglio culturale degli alunni: questo significa che nel momento in cui tali credenze vengono a scontrarsi con un sapere nuovo e corretto si verifica un **conflitto** tra il vecchio e assodato sapere e la nuova "teoria". Il "vecchio sapere", risultando inadeguato, costituisce un **ostacolo**.

1.3.2 Concetti

Concetto, nel Dizionario di Filosofia di Nicola Abbagnano [1901-1990], sta ad indicare: *«In generale, ogni procedimento che renda possibile la descrizione, la classificazione e la previsione degli oggetti conoscibili»².*

Quindi "concetto" implica un processo dinamico che consiste nell'estrapolare, dalle esperienze personali, conoscenze universali: *«Il suo nome latino (conceptus, da concepire) fa chiaro riferimento al risultato dell'atto di concepimento o generazione della mente nel suo staccarsi dall'immediatezza delle impressioni sensibili e delle rappresentazioni particolari e nel suo giungere ad una significazione universale.»* [D'Amore (1999), pag.195].

Vygotskij (1966, 1974) dedicò molta attenzione alla formazione dei concetti; egli parlò di sviluppo concettuale e riguardo ad esso individuò tre fasi che in D'Amore (1999) sono così riproposte, [D'Amore (1999), pag.197]:

² N. Abbagnano, *Dizionario di Filosofia*, Torino, UTET, 1971.

- *«fase dei mucchi sincretici, caratterizzata dalla mancanza di una referenza oggettiva stabile»;*
- *«fase del pensiero per complessi, che tende verso un modo oggettivo di pensare; il soggetto riconosce nessi concreti, ma non logici o astratti»;*
- *«fase concettuale, che opera utilizzando la capacità di astrarre».*

Vygotskij (1966) dichiara che la formazione di un concetto avviene attraverso un'operazione intellettuale *«guidata dall'uso delle parole che servono per concentrare attivamente l'attenzione, astrarre certi concetti, sintetizzarli e simboleggiarli per mezzo di un segno»* (106).

Il ruolo della comunicazione in classe assume quindi una valenza fondamentale per la costruzione non solo dei concetti ma anche di misconcetti come dimostrato nel paragrafo 2.2.

1.3.3 Immagini Mentali

L'immagine mentale è *«il risultato finale o preposizionale o misto prodotto da una sollecitazione (interna o esterna). L'immagine mentale è condizionata da esperienza personale, influenze culturali, stili personali, in poche parole è prodotto tipico dell'individuo, ma con costanti e connotazioni comuni tra individui diversi.»* [D'Amore (1999), pag.151].

In D'Amore (1999) sono elencate le caratteristiche preponderanti delle immagini mentali :

- *«la debolezza;*
- *la soggettività;*
- *la mancanza di un adeguato input sensoriale produttivo;*

- *l'essere parte di un atto di pensiero;*
- *l'essere sensoriale».*[D'Amore (1999), pag.146-147].

1.3.4 Misconcezioni e Conflitti

Nell'introduzione di questo capitolo già è stato delineato il tema delle misconcezioni; per riuscire a definire in modo ancora più puntuale tale problematica seguirà un'analisi sul loro ruolo nella formazione dei conflitti.

Con il termine *misconcezione* si vuole indicare un concetto non valido, errato, ma non per questo da considerarsi negativo in assoluto. La *misconcezione*, quando riconosciuta, può essere "riutilizzata" come strategia didattica nella costruzione di una nuova e più ampia conoscenza. Per spiegare cosa si intende per "misconcezione" si rifletta sull'esempio tratto da D'Amore (1999).

La maestra spiega agli alunni le figure piane; gli alunni le osservano disegnate alla lavagna, riportate sui libri e costruiscono un concetto di figura dovuto: sia alle proprietà delle diverse figure, sia alla loro rappresentazione grafica.

Prendiamo per esempio il rettangolo che, spesso, è rappresentato appoggiato sul lato più lungo orizzontale (base) e con l'altezza, verticale, più corta:



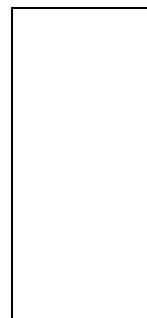
Lo studente si è costruito un'immagine del concetto di rettangolo partendo dall'orientamento che la figura assume nello spazio-foglio. Se successivamente questa immagine viene confermata da altre simili a

questa (dove il rettangolo è sempre raffigurato con il lato più lungo posto in orizzontale) allora l'immagine mentale si fortifica diventando un vero e proprio modello di *concetto di rettangolo*. Cosa si intende per modello è argomento del prossimo paragrafo; per ora basta sapere che con questo termine si indica l'insieme di tutte le immagini mentali riguardanti un concetto specifico, in questo caso quello del rettangolo.

Due ora sono le possibilità:

1. Il modello costruito è effettivamente l'immagine più completa del concetto;
2. Il modello si forma troppo presto e le informazioni raccolte dallo studente sono ancora parziali; il modello costruito rappresenta un ostacolo nel momento in cui ulteriori informazioni sul rettangolo si presentano allo studente.

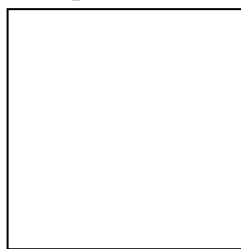
Ritornando all'esempio del rettangolo: un giorno l'alunno trova una rappresentazione di rettangolo "nuova". La nuova raffigurazione di rettangolo presenta il lato verticale più lungo di quello orizzontale. Il malessere e l'imbarazzo provato dallo studente di fronte alla nuova rappresentazione è sintomo di un conflitto tra il modello di rettangolo costruito e la nuova immagine. Il conflitto parte da una misconcezione del concetto di rettangolo causata dalla convinzione che vi sia un unico modo di rappresentarlo.



Vi sono due tipi di conflitto: cognitivo e sociocognitivo.

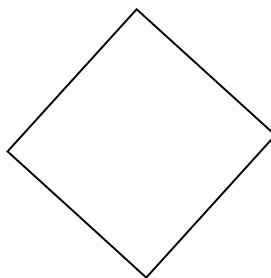
Il caso sopra descritto è un esempio di conflitto cognitivo, interno al soggetto. Questo può scaturire dalla non coincidenza tra due immagini o tra due concetti o tra un concetto e un'immagine. Per descrivere il conflitto sociocognitivo possiamo immaginare una situazione di questo tipo.

L'alunno ha sempre visto rappresentare il quadrato in questo modo:



e ne ha elaborato un modello legato a questa immagine.

Un giorno la maestra “ruota” la figura del quadrato;



l'alunno si accorge “dell'errore”³ della maestra e rimane interdetto dal comportamento del compagno di banco che riconosce in questa figura un quadrato.

Questo esempio descrive sia la presenza di un conflitto cognitivo che di uno sociocognitivo.

Alla base dei conflitti ci sono le misconcezioni, concetti non corretti o in eventuale corso di elaborazione.

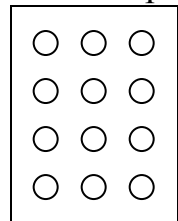
Il compito di un insegnante è quello di riconoscere, prima, e di affrontare, in seguito, il problema invece di sottovalutarlo o peggio di liquidarlo come “errore”.

³ L'errore in realtà non è stato commesso dall'insegnante ma l'alunno, che è stato portato a costruire un modello di quadrato in base dall'orientamento della figura, pensa che la maestra si è confusa nel disegnare il quadrato come un rombo.

1.3.5 Modelli Intuitivi e Modelli Parassiti

Occorre delineare in modo approfondito il tema riguardante i modelli. «Quando un insegnante propone un'immagine forte e coinvolgente, che diventa persistente, confermata da continui esempi ed esperienze, di un concetto C , l'immagine si trasforma in modello intuitivo». [D'Amore (1999), pag.131].

Per esempio: la maestra spiega la moltiplicazione ai bambini e per raggiungere il suo obiettivo si avvale di questa rappresentazione detta "per schieramento". Fino a quando la maestra proporrà ai bambini moltiplicazioni con i numeri naturali quali 3,4,9... questa rappresentazione può considerarsi valida.



Quando i bambini si troveranno davanti a una operazione come 3×0.5 , cosa accadrà al loro schieramento? Il modello intuitivo di moltiplicazione crolla. L'insegnante deve prestare attenzione ai messaggi che potrebbero essere colti dagli alunni, involontariamente o volontariamente trasmessi durante le attività didattiche.

Presentando solo moltiplicazioni simili a 3×4 il bambino potrebbe sviluppare un modello di questo tipo: la moltiplicazione *accresce sempre*. In questo specifico caso si parla di modelli parassiti. Il didatta, per prevenire l'insorgere di modelli intuitivi (negativi) e/o parassiti come nei due esempi presentati, dovrebbe fin da subito: dichiarare la parzialità dello "strumento schieramento" nel primo caso e nel secondo del significato di "accrescere", contribuendo a formare immagini e modelli predisposti ad ampliarsi in momenti successivi.

1.3.6 Ostacoli

Un ulteriore argomento da specificare è quello dell'ostacolo. Per descriverlo si può pensare agli ostacoli come a *«un'idea che, al momento della formazione di un concetto, è stata efficace per affrontare dei problemi precedenti, ma che si rileva fallimentare quando si tenta di applicarla ad un altro problema nuovo.»* [D'Amore (1999), pag. 210].

Gli ostacoli si possono classificare in:

1. ontogenetici;
2. epistemologici;
3. didattici.

Gli ostacoli ontogenetici dipendono sia dall'età cronologica che dallo sviluppo del soggetto. Sono legati allo sviluppo delle capacità intellettive del singolo bambino e questo comporta anche la considerazione che, mentre per un soggetto l'apprendimento di un fenomeno, di un argomento,... può risultare "semplice", per altri, invece, può rappresentare un ostacolo. L'ostacolo ontogenetico è legato al soggetto e alla sua maturità.

L'ostacolo epistemologico dipende dalla complessità dell'argomento stesso. *«Quando nella storia dell'evoluzione di un concetto si individua una non continuità, una frattura, cambi radicali di concezione, allora si suppone che quel concetto abbia al suo interno ostacoli di carattere epistemologico sia ad essere concepito, sia ad essere accettato dalla comunità dei matematici, sia ad essere appreso.»* [D'Amore (1999), pag. 213]. Le difficoltà incontrate dai matematici sono le stesse manifestate dagli studenti. Un esempio di ostacolo è l'apprendimento del concetto di infinito matematico.

L'ultima tipologia di ostacoli è definita didattica: *«Ogni docente sceglie un progetto, un curriculum, un metodo, interpreta in modo*

personale la trasposizione didattica, secondo le sue convinzioni sia scientifiche sia didattiche: egli crede in quella e la propone alla classe perché la pensa efficace; ma quel che è efficace effettivamente per qualche studente, non è detto che lo sia per gli altri. Per questi altri, la scelta di quel progetto si rileva un ostacolo didattico.» [D'Amore (1999), pag. 212].

1.3.7 Matematiche

Numerosi autori sostengono che la matematica rappresenta un vero e proprio linguaggio in quanto possiede una sintassi, una semantica e una pragmatica. Alcune ricerche mettono in evidenza la difficoltà degli studenti nell'acquisizione del linguaggio tecnico-scientifico proprio della disciplina. Questa difficoltà nasce dalla presenza di un *linguaggio speciale* che si discosta notevolmente dalla lingua comunemente parlata: si tratta di apprendere un linguaggio specialistico nuovo. Cosa avviene nella mente di un alunno quando deve apprendere un nuovo linguaggio? Perché nasce questa difficoltà?

Si pensi allo studio effettuato da Selinker (1972) sulla costruzione di un *nuovo linguaggio* effettuato dagli studenti, per esempio di lingua madre italiana, che devono apprendere una L2, per esempio l'inglese. Questo nuovo linguaggio è da lui battezzato con il termine "Interlingua"; con questa parola Selinker vuole indicare almeno tre fenomeni:

1. *«In ogni stadio dell'acquisizione di L2 il sistema grammaticale dello studente è distinto da L1 e da L2, essendo una lingua vera e propria in transizione verso un'approssimazione sempre migliore della L2» [Selinker (1972), pag.82];*

2. *«Successivi stadi dell'acquisizione linguistica formano una serie di approssimazioni della grammatica finale in cui le prime sono meno simili alla grammatica di L2 rispetto a quelle successive»* [Selinker (1972), pag.82];
3. *«L'interlingua di studenti allo stesso livello è simile, e le possibili differenze dovrebbero potersi attribuire a differenze di esperienza personale. L'interlingua è pertanto un'entità fluida, è un continuum compreso fra L1 e L2»* [Selinker (1972), pag.82].

Il fenomeno dell'interlingua è molto interessante poiché permette di capire cosa avviene nella mente di un alunno quando si appresta allo studio di una seconda lingua. Un aspetto che non può essere sottaciuto in merito è l'influsso che L1 può avere nei confronti di L2: questo influsso assume il valore di un vero e proprio transfer operato dal soggetto nei confronti di L2.

Il transfer linguistico può essere riscontrato anche quando un alunno si trova a dover apprendere il linguaggio dalla matematica: la L1 rappresenta il linguaggio in cui comunemente gli studenti comunicano tra loro, la L2 rappresenta il linguaggio specialistico della disciplina e l'interlingua rappresenta ciò che nasce dalla mescolanza tra linguaggio comune e linguaggio matematico e che D'Amore (1999) definisce con il termine *«matematichese»* [D'Amore (1999), pag.248].

Un esempio di matematichese è proposto in D'Amore (1993) dove sono descritte molte situazioni-protocolli inerenti a questo tema.

A testimonianza riporto un esercizio proposto in una III elementare: questo è il testo di un problema seguito dalle risposte date dai bambini:

« Antonio studia fino alle 17 e Giovanni studia fino alle 18. Chi ha studiato per più tempo ».

« Antonio fa 60 Minuti di orologio in meno e Giovanni 60 Minuti di orologio in più.

Antonio è stato più furbo di Giovanni.

Giovanni è stato meno furbo di Antogno.

Antonio ha studiato di meno e Giovanni di più. Giovanni ha studiato un ora in più e Antogno un ora in meno Giovanni ha fatto un ora composta di 4 quarti o due mezzi o intera cioè un ora intera".» [D'Amore B. (1993), pag. 293-294].

Si coglie lo sforzo di questi bambini nell'esprimersi attraverso il linguaggio che loro credono specifico della matematica, esprimendosi invece in un miscuglio tra lingua comune e lingua matematica: appunto il matematiche.

Capitolo 2

2.1 Cosa sono le misconcezioni

2.1.1 Introduzione: le misconcezioni

Nel paragrafo 1.3 sono state presentate alcune problematiche di interesse didattico. Si è parlato di concetti, immagini, modelli, ostacoli, conflitti e linguaggio, ma anche di “misconcezioni”.

Questo termine sta ad indicare *«un concetto errato e dunque costituisce genericamente un evento da evitare.»* [D’Amore (1999), pag.124]. Non sempre le misconcezioni assumono valenza del tutto negativa, poiché si possono considerare anche quali *«concezioni momentaneamente non corrette, in attesa di sistemazione cognitiva, più elaborata e critica.»* [D’Amore, Frabboni (1996), pag.108].

Questa seconda prospettiva presuppone una capacità d’intervento, da parte del didatta, tale da poter superare l’ostacolo posto dalle misconcezioni e condurre gli alunni verso la costruzione di un nuovo concetto.

Non sempre l’insegnante è in grado di riconoscere le misconcezioni insite nei ragionamenti e nelle menti degli studenti. Questa mancanza di accortezza può essere dovuta a più fattori:

1. A volte è l’insegnante stesso a covare delle misconcezioni e -di conseguenza- a trasmetterle agli studenti durante le diverse attività didattiche. Ad esempio: un insegnante ha sempre visto rappresentare graficamente il punto geometrico come un piccolo

segno tondo lasciato dalla punta della matita o della penna su di un foglio allo stesso modo lo spiegherà e lo rappresenterà ai suoi alunni;

2. L'insegnante confonde le misconcezioni con gli errori. Ad esempio: in un manuale scolastico si legge questa proposizione *«Per moltiplicare un numero per 10, si aggiunge uno zero alla fine del numero dato.»* [Maier (1998), pag.7]. Applicando tale regola alle operazioni con i numeri decimali i bambini commettevano questo “errore”: $4,5 \times 10 = 4,50$. Non si tratta di un semplice errore ma di una vera e propria misconcezione, dovuta all'acquisizione di una regola che per i numeri interi risulta “esatta” ma che non può essere applicata anche ai numeri decimali.
3. Altre volte ancora si rischia di creare delle misconcezioni utilizzando un linguaggio ambiguo durante le ore di matematica. La formazione di misconcezioni, dovuta all'uso di un linguaggio inappropriato, è un tema estremamente interessante in quanto entra in gioco anche un secondo fattore: la rappresentazione. Quando ai bambini viene chiesto di spiegare cos'è l'altezza di una figura geometrica questi rispondono che è *«una linea che deve essere verticale, cioè parallela ai lati destro e sinistro del foglio.»* [Maier (1993), pag.75]. Da dove nasce tale misconcezione?
 - a. Dal significato e dall'immagine che il termine “altezza” assume nel linguaggio e nella realtà quotidiana;
 - b. Da come questo termine è spiegato e rappresentato dall'insegnante e dai manuali scolastici.
4. A quest'ultima affermazione si collega il prossimo fattore: i manuali spesso possono nascondere, involontariamente, tra le pagine delle imprecisioni o degli errori che possono diventare

misconcezioni. Per esempio: in molti manuali scolastici (di qualsiasi livello o grado) le rappresentazioni grafiche delle figure piane possono essere la causa di una misconcezione (vedi paragrafo 1.3.4).

La lista potrebbe continuare ma ciò su cui occorre ragionare è il fatto che molto spesso la formazione di una misconcezione non è dovuta alla presenza di un unico fattore ma dall'azione sinergica di più di essi.

Quando una misconcezione viene avvalorata da tanti elementi congruenti risulta sempre più difficile da smantellare perché oramai divenuta una vera e propria convinzione: *«Il discente non è un contenitore vuoto da riempire di conoscenza, ma un soggetto attivo che interpreta la realtà, che mette in relazione i fatti osservati con le esperienze precedenti, che costruisce schemi interpretativi alla luce dei quali anticipa le esperienze future. Le convinzioni (o credenze) sono il frutto di questo continuo processo di interpretazione.»* [Zan (1998), pag.90]. Le convinzioni non hanno tutte la stessa *«“forza” psicologica»* [Zan (1998), pag.91]: alcune sono più radicate e convalidate, definite appunto centrali; altre sono più soggette a modifiche e per questo chiamate periferiche. Le misconcezioni o *«concezioni scorrette»* [Zan (1998), pag.91] sono la causa dell'insorgere di errori: si tratta, molto spesso, di convinzioni implicite *«di cui il soggetto non è consapevole, e per questo agiscono in modo ancora più subdolo e sottile.»* [Zan (1998), pag.91]. Un esempio inerente a quanto detto è quello riportato da Zan (1998): *«Siccome $31 > 5$, allora $0,31 > 0,5$ »* [Zan (1998), pag.92]. Ancora: *«Se moltiplico due numeri il numero è maggiore di entrambi»* [Zan (1998), pag.91]:

$3 \times 4 = 12$ la proposizione è vera

$3 \times 0,4 = 1,2$ la proposizione è falsa

Dopo averne delineato solo alcune caratteristiche, il tema delle misconcezioni sarà nuovamente affrontato e approfondito, in questo secondo capitolo, nel suo rapporto con le problematiche presentate nel paragrafo 1.3: in particolare il linguaggio, immagini e concetti.

2.1.2 Errore o Misconcezione?

Anche se già affrontato questo tema ha bisogno di essere ripreso e trattato in modo esaustivo.

L'errore è sempre stato visto, a volte ancor oggi, come un qualcosa di assolutamente negativo, indice di una mancanza di studio da parte dello studente. È soprattutto in questi ultimi decenni che si è verificata un riesame dell'errore che ha assunto un valore non sempre negativo: *«esso è visto come un avviso che dà lo studente all'insegnante di non avvenuta comprensione.»* [D'Amore, Frabboni (1996), pag.187]. L'errore diventa come una spia luminosa che si accende ogni qualvolta che l'azione didattica risulta inefficace o bisognosa di ulteriori interventi.

Una volta un prete, durante la predica, disse che quando si punta un dito contro ad una persona ce ne sono altri quattro puntate contro se stessi: è un messaggio che, contestualizzato nella didattica, racchiude in sé un grande insegnamento. Prima di considerare l'alunno l'artefice unico del proprio successo il didatta dovrebbe rivalutare la propria azione didattica, trovare strategie adatte ad ogni alunno e valutare il proprio operato oltre a quello dei suoi studenti: *«L'insegnante è soprattutto un esperto disciplinare con il compito di far apprendere: dunque l'errore non ha a che fare, nella maggior parte dei casi, con la valutazione dell'allievo che l'ha commesso, ma con l'autovalutazione, da parte*

dell'insegnante serio ed intelligente, dalla efficacia della propria azione didattica» [D'Amore, Frabboni (1996), pag.187].

Considerare le misconcezioni come semplici errori è:

- banale: perché si rischia di sottovalutare l'intero processo mentale che ogni singola persona compie quando si costruisce dei concetti -anche se sbagliati- (vedi paragrafo 1.3.1);
- pericoloso: poiché si rischia di affrontare in modo semplicistico una vera e radicata convinzione.

Un esempio può essere d'aiuto:

«15 amici si dividono 5 chilogrammi di biscotti.

Quanti ne spettano a ciascuno?»

[Deri, Sainati Nello, Sciolis (1983)]

Studenti delle scuole superiori hanno risolto il problema con questa operazione: 15:5

Come si può giustificare tale “errore”? Gli studenti si sono formati un modello di divisione dove il dividendo deve essere sempre maggiore del divisore; questo ha spinto gli studenti a dividere i “15 amici” per i “5 kg di biscotti” trovando non quanti chilogrammi spettano ad ogni amico ma *«quanti amici a ciascun chilo di biscotti.»* [D'Amore, Frabboni (1996), pag.106].

Se l'insegnante non si limitasse a sottolineare con la penna rossa questo errore e indagasse, facendo ragionare i ragazzi, si accorgerebbe che non si tratta di una semplice “svista” ma di una vera e propria applicazione di una regola costruita implicitamente: ovvero di una misconcezione.

2.2.3 La comunicazione come strumento di controllo

Attraverso la comunicazione il didatta può realmente verificare il concetto che l'alunno si è costruito e l'alunno può agire sul proprio sapere operando una metacognizione del processo che lo ha condotto a formare quel tipo di concetto.

La comunicazione, che quindi non può consistere solo in interrogazioni e verifiche, diventa uno strumento utile:

- all'insegnante per verificare, senza giudizio, come il proprio intervento didattico è stato appreso e cosa ha costruito nella mente degli alunni;
- allo studente perché esternando le proprie convinzioni può confrontarle non solo con l'insegnante ma anche, e soprattutto, con i compagni.

L'interrogazione non raggiunge lo stesso risultato:

- per gli allievi diventa importante "indovinare" ciò che l'insegnante vuole sentire;
- per il didatta verificare e valutare l'apprendimento degli alunni è fondamentale. Pochi sono gli insegnanti che davanti a un insuccesso o successo degli alunni indagano sul processo che sta alla base di questi. Per esempio: Pierino deve spiegare ai suoi compagni come si trova l'area di un trapezio. Per far ciò il bambino riporta la formula che l'insegnante ha fatto scrivere sul quaderno. Il didatta valuta la prestazione di Pierino ma è in grado di valutare l'effettivo apprendimento di questo sapere?

2.2 Le misconcezioni e il linguaggio

2.2.1 Linguaggio matematico, lingua standard e matematiche

Insegnare vuol dire in grande misura trasmettere informazioni: quindi la comunicazione si pone al centro della relazione tra insegnante e discente. Durante le ore di matematica la comunicazione si avvale di termini specifici della disciplina stessa che spesso rivelano, da parte di non pochi studenti, difficoltà legate alla comprensione. Quando le informazioni riscontrano difficoltà di decodifica, significa che la comunicazione rappresenta un ostacolo a livello linguistico o psicologico. Queste difficoltà sono legate alla complessità del linguaggio tecnico-specifico proprio della matematica e come tali vanno affrontate.

Il motivo per il quale molti studenti trovano e dichiarano di avere difficoltà con il linguaggio matematico poggia sull'uso di una terminologia che spesso può sembrare ambigua: come per esempio la presenza di termini che non solo fanno parte del linguaggio matematico ma anche di quello standard, comune.

Si può compiere una distinzione tra lingua standard e lingua specifica: mentre la prima è figlia di un processo di acquisizione di tipo naturale, la seconda lo è di un processo di apprendimento indotto. Per l'acquisizione della lingua standard il fattore determinante è l'esposizione spontanea a questo modo di comunicare; per l'apprendimento di un linguaggio specifico, come quello della matematica, interviene invece la consapevolezza di studiare una *lingua diversa*, in un ambiente innaturale o formale, come la scuola.

Ed è proprio nella scuola, durante le ore di matematica, che lingua comune e lingua specifica si “mescolano” e formano un linguaggio intermedio definito “matematico” in D’Amore (1999). Al matematico si può pensare come ad *«una specie di dialetto matematico che si usa in classe.»* [D’Amore (1999), pag.248].

In effetti, durante le ore di matematica, la comunicazione, tra alunni e didatta, non avviene né in lingua comune né nella lingua tecnica dei matematici: *«si assume una sintassi specifica (a volte farriginosa), una semantica ritenuta opportuna e ne nasce una strana lingua...»* [D’Amore (1999), pag.249].

L’atteggiamento tipico degli alunni è quello di apprendere tale lingua credendola “linguaggio matematico”. Gli studenti cercano di imitare il linguaggio adottato dal loro insegnante: parlano di punto, angoli, vertici, quadrati costruiti sui lati di un triangolo e via dicendo...ma sono realmente consapevoli del loro significato “matematico”? È proprio in questa consapevolezza che si cela la più grande difficoltà legata alla comprensione del linguaggio specifico, ad esempio: il termine “punto” assume diversi significati a seconda del campo semantico in cui è inserito: in matematica, in italiano, nel campo medico, nell’ambito artistico, in quello musicale ecc... L’insegnante deve far ragionare gli alunni sulla molteplicità di significati che un termine assume in un campo piuttosto che in un altro.

2.2.2 Cos’è il linguaggio matematico?

Un paradosso caratteristica il linguaggio specifico:

- se l’insegnamento è prima di tutto comunicazione, ovvero trasmissione di saperi, fondamentale è che il linguaggio utilizzato

non diventi la causa principale di ostacoli; per evitare che questo si verifichi occorrerebbe *«evitare che il linguaggio utilizzato sia fonte di ostacoli alla comprensione»* [Laborde (1995), pag.121];

- la matematica ha un suo specifico linguaggio; compito della didattica è di far apprendere questo linguaggio agli studenti: *«dunque, non si può evitare di far entrare a contatto gli allievi con quel linguaggio specifico, anzi: al contrario, occorre presentarlo [...] perché lo facciano proprio.»* [D'Amore (1999), pag.248].

Sempre secondo Laborde (1995) tre sono le caratteristiche del linguaggio specifico della matematica:

1. precisione
2. concisione
3. universalità

La lingua matematica si avvale di scritture specifiche e di espressioni simboliche, di un *«codice semiologico proprio»* [D'Amore (1999), pag.252]. La difficoltà di queste scritture ed espressioni dipendono dal fatto che con poche parole si descrive un fenomeno ricco di elementi, come ad esempio:

*«Costruisci E simmetrico di A rispetto a I
ed F simmetrico di B rispetto a J .»*

[D'Amore (1999), pag.253]

Questa *economia d'espressione* dipende dalle funzioni che il codice deve soddisfare:

- una di designazione: *«si assegna ad un oggetto matematico una designazione quale un nome proprio che è sufficiente menzionare quando se ne vuole parlare: A, B, C, \dots, P per un punto, a, x, \dots, n per un numero ecc.»* [Laborde (1995), pag.123];

- una di localizzazione: *«le designazioni composte esercitano la funzione supplementare di localizzare gli oggetti che designano rispetto ad altri oggetti matematici: la designazione (AB) non ha come sola funzione di designazione una retta, ma esprime il fatto che questa retta contiene i punti A e B.»* [Laborde (1995), pag. 123].

I testi di matematica sono ricchi di espressioni simboliche come equazioni, formule, espressioni algebriche molto spesso inserite in frasi appartenenti alla lingua comune.

Maier (1993) individua in tre punti fondamentali le cause principali delle difficoltà riscontrate dagli studenti nella decodifica del linguaggio matematico:

1. Vocabolario sconosciuto: il linguaggio matematico proposto dall'insegnante di matematica, nonché dai manuali scolastici, è ricco di termini tecnici, alcuni dei quali estranei al linguaggio comune utilizzato dai bambini nella quotidianità. Altri termini, invece, appartengono tanto al linguaggio standard quanto a quello matematico assumendo un significato diverso nel primo e nel secondo;
2. Convinzioni linguistiche che cambiano: Maier dichiara a riguardo che *«sono numerose le differenze tra la lingua matematica e quella quotidiana; per la maggior parte riguardano l'uso dei nessi logici e dei quantificatori.»* [Maier (1993), pag.73]. A testimonianza Maier riporta questa frase *«un quadrato di un centimetro di lato ha per area un centimetro quadrato.»* [Maier (1993), pag.73]. La difficoltà si presenta nel momento in cui si cerca di tradurre questa definizione con la lingua comune: gli studenti, utilizzando convinzioni della lingua standard, apprendono che una superficie di un centimetro quadrato è data esclusivamente da un quadrato il cui lato misura 1 cm.

3. Miscugli dei sensi: talune espressioni e alcuni termini tecnici appartengono sia al linguaggio matematico che a quello comune e, come già sottolineato in più occasioni, in ognuno di essi assumono un significato proprio. Per esempio la parola “PERIMETRO”: contestualizzato nella lingua comune è utilizzato come sinonimo di **contorno**; in ambito matematico **contorno** e **perimetro** rappresentano due concetti assolutamente diversi: *«Si può parlare di miscuglio dei sensi per descrivere quello che sembra avvenire nella mente degli allievi che cercano di dare nuovi sensi a dei termini che, nella loro mente, possiedono di già il carattere di idee stabili dal loro uso nella comunicazione quotidiana.»* [Maier (1993), pag.74].

Le difficoltà di comprensione del linguaggio sono spesso legate alla corrispondenza termine-rappresentazione: *«In geometria, sono molti gli allievi che hanno difficoltà a capire le indicazioni, i problemi e le spiegazioni fornite dall'insegnante o dal manuale, perché le loro convinzioni geometriche rimangono strettamente legate alle figure e ai modelli concreti utilizzati come supporti visivi per formare queste concezioni.»* [Maier (1993), pag.75].

Si pensi ad una linea retta infinita che è rappresentata nei manuali sempre in questo modo: ..._____...

Una rappresentazione grafica di questo tipo non può rappresentare il carattere infinito proprio della retta.

Ancora: quando i bambini ragionano sulla “descrizione” di *punto geometrico* ciò che rimane in loro non è tanto il concetto di “mancanza di dimensione”, quanto la sua rappresentazione che consiste in un segno grafico ben individuabile; *«Deve essere reso molto chiaramente che solo le idee ideali e trascendenti possono realmente rappresentare la nozione e che i supporti visivi non sono idee di questo tipo.»* [Maier (1993), pag.77].

L'insegnante in classe, per ovviare tutte queste problematiche, dovrebbe cercare di accostarsi -con molta attenzione- alle difficoltà che gli alunni dichiarano o potrebbero inconsapevolmente avere. Maier (1993) suggerisce un uso ampio di supporti visivi ed esempi in modo da evitare la costruzione di modelli matematici erronei e/o inadeguati.

Oppure: sostituire termini geometrici con altri meno complessi (anche se occorre sempre tener conto degli interlocutori che si hanno davanti); per esempio sostituire il termine cilindro con colonna o rotolo, vettore con freccia...

Per concludere: l'uso di un linguaggio tecnico e di una terminologia specifica *«non dovrebbe essere considerata come un contenuto dell'apprendimento, come un fine a sé stante nell'insegnamento della matematica. Deve rimanere un mezzo per raggiungere l'obiettivo finale, che è l'espressione delle idee e la presentazione delle informazioni.»* [Maier (1993), pag.79].

2.2.3 Il linguaggio: causa delle misconcezioni

Che il linguaggio matematico rappresenti una seria difficoltà, da parte degli studenti, e quali ne siano le cause lo si deduce dai paragrafi precedenti. Ma cosa può nascere dall'imbarazzo di fronte a questo linguaggio? Gli alunni, per poter superare i diversi ostacoli, legati alla decodifica del linguaggio specifico, si appoggiano al linguaggio quotidiano e con questo cercano di trovare una spiegazione a ciò che hanno davanti. Questo loro aggrapparsi al linguaggio standard spesso dipende dall'atteggiamento che l'insegnante ha nei confronti del linguaggio matematico: quando il didatta spiega ai bambini cosa significa "altezza" di una figura usa solitamente queste parole:

«L'altezza sarà sempre il segmento che, dal vertice opposto, cade perpendicolarmente sulla base o sul suo prolungamento.»

[A.A.V.V. (1990), pag.224]

Parole quali: opposto, cade, perpendicolarmente, base, prolungamento... per il didatta non rappresentano alcuna difficoltà, ma può essere sicuro che i suoi alunni abbiano la stessa chiarezza? Il termine “altezza”, per gli studenti, può rappresentare:

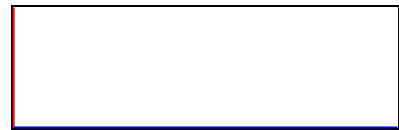
→ una «*linea che deve essere verticale*» [Maier (1993), pag.75];

→ la «*lunghezza dell'altezza di una figura*» [Maier (1993), pag.79];

→ una linea che parte da un vertice e che cade perpendicolarmente alla base.

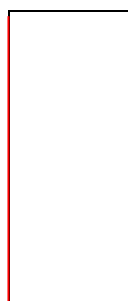
Apriamo una piccola parentesi.

Prendiamo per esempio un rettangolo così come spesso è rappresentato nei libri di testo:



la base del rettangolo è colorata di blu mentre l'altezza di rosso: nella mente dei bambini si concretizza questa immagine che conferma la definizione di *altezza di una figura*.

Ruotando la figura i ragazzi dovrebbero osservare che ciò che avevano



chiamato altezza ora è base e ciò che prima era base ora è altezza.

Parlare di base, lato obliquo ecc... può rappresentare solo una ulteriore difficoltà, o, per essere più precisi, creare una misconcezione molto dura da affrontare: meglio è limitarsi a

parlare di lati e della loro rispettiva altezza.

Il linguaggio matematico è costituito da tanti termini tecnici e molti di questi sono presenti anche in ambiti diversi e questo può confondere gli

studenti, nei migliori dei casi; ma può anche accadere che alcuni alunni facciano corrispondere a un termine matematico il significato che il medesimo termine assume in un altro ambito, come avviene per il termine “**area**”: i bambini pensando al significato che questa parola assume nella quotidianità, confondono **area** con **superficie**. Ciò che l’insegnante si trova a dover affrontare è una vera e propria misconcezione legata al linguaggio. Di fronte ad essa il didatta deve operare delle strategie “di recupero”. Maier suggerisce di *«sensibilizzare gli allievi al cambiamento del significato delle parole secondo il contesto, nell’abitarli a scoprire un cambiamento di significato quando il contesto stesso cambia.»* [Maier (1993), pag. 79]. Non solo: propone anche una collaborazione tra insegnante di matematica e i colleghi dell’area linguistica-espressiva, Maier (1998).

2.3 Concetti, immagini e loro rappresentazioni grafiche

2.3.1 Immagini, Concetti: misconcezioni in geometria

Cosa si intende per immagine e cosa per concetto è argomento dei paragrafi 1.3.1 e 1.3.2.

Scopo di questo paragrafo è invece quello di riflettere sulla possibile presenza di misconcezioni nella costruzione di concetti e immagini legati alla geometria.

Così come il linguaggio quotidiano risulta essere causa di misconcetti nel suo interagire con il linguaggio specifico della matematica, anche la realtà, nel suo significato più universale, diventa un fattore determinante nella costruzione di convinzioni errate: *«l'immagine mentale legata ad un concetto geometrico resta sempre molto vicina all'immagine mentale di un oggetto della realtà.»* [Mariotti (1992), pag.867].

A dimostrazione di quanto sostenuto, l'autrice riporta l'esempio di due oggetti⁴ geometrici semplici: il punto e la retta (Mariotti 1992).

Da un'indagine condotta su studenti dai 7 agli 11 anni, emerge che *«l'idea di punto e, in particolare di “punto di intersezione tra rette” che gli allievi hanno, sembra essere, inizialmente, strettamente legata ad una immagine concreta. E di tale immagine concreta il punto mantiene la caratteristica di cambiare la dimensione, ma talvolta anche il peso e*

⁴ Il termine **oggetto** può sembrare inappropriato. Sotto questa voce il *Dizionario Zingarelli della Lingua Italiana* (seconda edizione) a cura di Anna Cattana, Maria Teresa Nesci (Bologna, Zanichelli, 2003) scrive: *«qualsiasi corpo materiale, che si vede e si tocca»*. In questo specifico contesto riferito alla geometria, **oggetto** è usato con lo scopo di indicare tutti gli enti, le figure ecc... della matematica. È tipico del linguaggio del matematico denominare “oggetti” in senso esteso gli elementi di cui si tratta (numeri, poligono, segmenti...).

la forma, a seconda della situazione che si sta considerando.» [Mariotti (1992), pag.868].

Lo stretto legame tra geometria e realtà può divenire causa di convinzioni non corrette. La misconcezione che nasce nel considerare il punto geometrico come un elemento concreto può essere indotta dal disegno: il ragazzo identifica nell'oggetto disegnato il concetto mentale- astratto: *«il disegno finisce con l'ostacolare il necessario distacco dal concreto.»* [Mariotti (1992), pag.868]. In ambito didattico-educativo il disegno assume il valore di linguaggio e la sua importanza non è seconda a quella del linguaggio orale o scritto: *«al di là della funzione puramente comunicativa, il disegno assume una funzione cognitiva fondamentale, e specifica, nel processo di comprensione del mondo»* [Mariotti (1995), pag. 52-53].

I concetti geometrici non si possono considerare puri concetti astratti poiché sono strettamente legati ad aspetti più concreti, come la loro rappresentazione grafico-pittorica.

Nelle teorie correnti, *concetti e immagini* sono distinti ma in geometria tra i due aspetti esiste un filo che li tiene strettamente uniti. Gli oggetti geometrici sono caratterizzati sia da un aspetto concettuale sia da uno figurale. La duplice natura degli enti geometrici può provocare confusione e quindi determinare situazioni conflittuali dove i due aspetti risultano in contrasto: *«l'interazione tra la componente figurale e la componente concettuale, non potrà fare a meno di essere talvolta conflittuale, ma tale conflittualità potrà rivestire un ruolo positivo, qualora il processo interattivo sia previsto e controllato in una situazione didattica predefinita»* [Mariotti (1992), pag. 880].

2.3.2 La geometria e le sue rappresentazioni

La geometria, come affermato in Mariotti (1993), si occupa di proprietà e di figure geometriche astratte, universali, che nulla dovrebbero spartire con la realtà.

Al contrario i concetti geometrici *«conservano aspetti figurali, rappresentabili pittoricamente, provenienti dalla loro origine, lo spazio reale»* [Mariotti (1993), pag.14].

Come affermato precedentemente i concetti geometrici sono caratterizzati da due componenti: una concettuale e una figurale. La prima *«si riferisce al carattere astratto (ideale, generale...) e teorico di tali concetti»* [Mariotti (1995), pag.47]; la seconda *«trae origine dal mondo fisico in cui i concetti nascono»* [Mariotti (1995), pag.47].

È interessante osservare il legame che si instaura tra un concetto geometrico e le diverse rappresentazioni grafiche.

Mariotti (1995) propone l'esempio della rappresentazione del concetto geometrico di triangolo: *«non appena disegnato un triangolo diventa una particolare istanza del concetto figurale, pur non godendo delle proprietà fondamentali della componente concettuale, ad esempio della generalità»* [Mariotti (1995), pag.47].

La rappresentazione grafica di un concetto astratto, come lo sono quelli della matematica, se da un lato può essere da aiuto nel processo d'apprendimento, dall'altro può essere la causa di misconcezioni.

Alcune ricerche hanno dimostrato che, quando si introduce un nuovo concetto geometrico, diventa quasi impossibile non riportare delle rappresentazioni grafiche: *«l'attività di produzione sembra rivestire un ruolo assai importante nella costruzione di un rapporto corretto tra concetti e loro rappresentazioni; e ciò è vero anche per il disegno e i concetti geometrici. Il punto centrale sembra essere quello di dare*

importanza alla funzionalità delle produzioni grafiche. Dal punto di vista didattico, si tratta di considerare come il disegno possa giocare nella costruzione del senso per le conoscenze geometriche» [Mariotti (1995), pag.50].

Questa modalità didattica (presentare per esempio una figura solida attraverso una sua rappresentazione grafica) può creare disorientamento negli studenti: come può una figura tridimensionale essere rappresentata su di un foglio di carta? In cosa consiste la sua tridimensionalità? E il suo occupare uno spazio e avere un volume?

Se il didatta si avvale di alcuni strumenti (come il disegno) per rendere più chiaro allo studente ciò che vuole trasmettere loro, deve essere consapevole del messaggio che può essere o meno percepito dagli alunni di fronte a tale strumento.

La rappresentazione grafica può essere un utile ma non sufficiente strumento per far capire agli studenti il concetto di tridimensionalità -nell' esempio sopra proposto-.

Il didatta deve essere consapevole che spesso «*i concetti geometrici degli allievi rimangono fortemente legati con i pochi modelli ai quali è stata limitata la presentazione delle nozioni geometriche*» [Maier (1993), pag.76].

2.3.3 Per concludere

In questo capitolo si sono trattate due tematiche di indubbia importanza a livello didattico: il linguaggio specifico e il linguaggio iconico. Entrambe sono state affrontate nel loro rapporto con le misconcezioni.

Nel paragrafo 2.2 si è cercato di evidenziare come le misconcezioni causate dal linguaggio specifico della matematica possano essere il risultato di numerosi fattori:

- il diverso significato che una stessa parola può assumere nei diversi ambiti;
- la presenza di numerosi termini tecnici e specifici della matematica;
- lo stretto legame che si instaura tra lingua comune e lingua specifica;
- la corrispondenza tra un termine e la rappresentazione grafica che ne viene data;
- ...

Nel paragrafo 2.3 si è prestata attenzione alla rappresentazione iconica della geometria con la finalità di far riflettere su come le misconcezioni possano nascere dalla non corrispondenza tra oggetto matematico e sua presentazione grafica.

I due linguaggi (quello specifico e quello iconico) sono stati affrontati poiché il capitolo tre si incentrerà sull'analisi delle misconcezioni, rilevate durante un'esperienza didattica, causate proprio da queste due problematiche.

Capitolo 3

3.1 Iniziamo dalle Misconcezioni

3.1.1 Perché le misconcezioni

È dopo aver frequentato le lezioni di “Didattica della Matematica” tenute dal professor D’Amore che è nata l’idea di affrontare una tesi sulle misconcezioni. Per essere più precisi è stata una lezione tenuta dalla professoressa Sbaragli, collaboratrice di D’Amore, che ha stimolato l’interesse verso questo argomento.

Per introdurre un tema nuovo come le misconcezioni la professoressa ha riportato alcuni esempi tratti dalla realtà scolastica.

Esempio 1: Perimetro & Contorno

Spesso gli alunni confondono il significato di Perimetro (termine della geometria) con il significato della parola Contorno: non solo gli studenti ma a volte anche taluni insegnanti considerano i due termini sinonimi:

<p>PERIMETRO</p> <p>È la misura del contorno di un poligono.</p>	<p>CONTORNO</p> <p>È una linea chiusa che delimita l’area di una figura.</p>
--	--

Esempio 2: Circonferenza & Cerchio

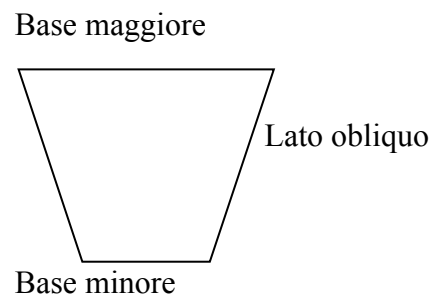
Spesso accade che Cerchio e Circonferenza vengano usati per indicare lo stesso oggetto geometrico. In realtà i due termini indicano due oggetti diversi:

CERCHIO Indica la misura di una superficie.
--

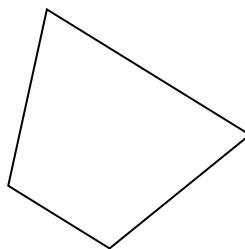
CIRCONFERENZA Indica una linea chiusa costituita da un insieme di punti equidistanti da un medesimo punto fisso, detto centro.

Esempio 3: Base Maggiore, Base Minore e Lato Obliquo

Quando si descrive una figura piana come il trapezio solitamente si usano termini quali: base maggiore, base minore e lati obliqui. Ma queste parole cosa indicano? Sono dei termini con i quali si identificano dei lati della figura.

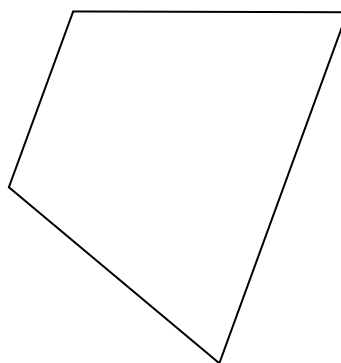


Se nella figura sopra disegnata è facile riconoscere qual'è il lato obliquo rispetto ai due lati orizzontali (definiti basi) più difficile potrebbe risultare in un trapezio così disegnato:



Se al termine obliquo si dà il significato «*inclinato, storto, che non segue una linea retta*»⁵ allora in questa seconda rappresentazione di trapezio vi sono ben quattro linee oblique.

E se si ruota ancora il trapezio ci si accorge che il lato che nella prima rappresentazione di trapezio era chiamato obliquo ora non lo è più...



Dopo questi esempi la professoressa Sbaragli ha riportato anche altre esperienze presenti in D'Amore (1999), alcune delle quali già descritte nel paragrafo 1.3.

Capire cosa sono le misconcezioni e il ruolo che nell'attività d'insegnamento potrebbero assumere è ciò che ha fatto nascere l'idea di un progetto didattico.

3.1.2 Faccia a faccia con le misconcezioni

Una misconcezione è un «concetto errato e dunque costituisce genericamente un evento da evitare; essa però non va vista sempre come una situazione del tutto o certamente negativa: non è escluso che per poter raggiungere la costruzione di un concetto, si renda necessario

⁵ *Dizionario Zingarelli della Lingua Italiana* (seconda edizione) a cura di Anna Cattana, Maria Teresa Nesci (Bologna, Zanichelli, 2003).

passare attraverso una misconcezione momentanea, ma in corso di sistemazione.» [D'Amore (1999), pag.124].

Riflettendo su questa definizione è nato un percorso didattico sulle misconcezioni rivolto a una classe IV di una scuola di base di Rimini.

Il valutare le misconcezioni anche positivamente, come se fossero strumenti didattici, sta alla base dell'intero percorso che, non a caso, ha come titolo: "Iniziamo dalle misconcezioni".

Un progetto come questo non si limita a "scovare" gli errori degli alunni. Il sapere trasmesso dal didatta e il sapere acquisito dagli alunni (spesso i due saperi non coincidono) sono posti al centro di attente riflessioni: effettuate sia dal didatta che dagli studenti stessi.

Porre alunni e insegnanti davanti al proprio sapere (appreso, acquisito, elaborato e rielaborato) conduce verso un'analisi delle proprie conoscenze.

Prima di rivolgere l'attenzione sull'alunno il didatta è chiamato a compiere un'auto-analisi: a prendere coscienza delle proprie misconcezioni. Il mettere in gioco sé stessi e il proprio sapere non sempre può risultare facile da compiere, poiché richiede di:

1. prendere coscienza del fatto che alla base del proprio sapere vi sono delle convinzioni che non sono del tutto corrette;
2. riconoscere di poter essere la causa di alcuni errori riscontranti tra i propri alunni;
3. ammettere di dover ricostruire un nuovo e più completo bagaglio di conoscenze.

Lo scopo di un lavoro sulle misconcezioni è quello di rendere consapevole il didatta -in primo luogo- e gli studenti delle misconcezioni che possono aver acquisito e fatte proprie credendole delle vere conoscenze... e partendo da queste ricostruire un nuovo e appropriato sapere.

3.1.3 Ipotesi di progettazione iniziale

Non poche sono state le difficoltà nella progettazione di un ipotetico itinerario didattico sulle misconcezioni da presentare alla maestra tutor. La stesura di un percorso sulle misconcezioni ha richiesto la conoscenza di alcune fondamentali variabili:

- la conoscenza dei soggetti ai quali l'atto didattico si rivolge;
- la raccolta dei materiali che possono offrire suggerimenti utili nella scelta degli argomenti;
- l'individuazione delle possibili cause che hanno condotto i bambini a sviluppare e/o apprendere convinzioni non corrette.

Dovendosi però stilare almeno una "bozza" di progetto didattico si è fatto riferimento alle misconcezioni affrontate in D'Amore (1999) e partendo da queste si è costruita una scheda di presentazione:

CLASSE	<i>IV ELEMENTARE</i>
DISCIPLINE COINVOLTE	<i>MATEMATICA, EDUCAZIONE ALL'IMMAGINE, INFORMATICA E ITALIANO.</i>
MAESTRE COINVOLTE	<i>PRINCIPALMENTE LA MAESTRA DI MATEMATICA MA POTREBBE ESSERE UTILE L'INTERVENTO DELLE MAESTRE DI ITALIANO E IMMAGINE.</i>
OBIETTIVI COGNITIVI	<i>→IL BAMBINO COMPRENDE IL SIGNIFICATO DI PUNTO, SEGMENTO, VERTICE, ANGOLO, SPIGOLO E LI RICONOSCE NELLO SPAZIO INTORNO A LUI; →IL BAMBINO RICONOSCE, DESCRIVE, COSTRUISCE FIGURE GEOMETRICHE: PIANE E SOLIDE. →IL BAMBINO COMPRENDE IL SIGNIFICATO DEI TERMINI TECNICI DELLA GEOMETRIA.</i>
COMPETENZE SOCIALI	<i>→IL B. RISPETTA I TURNI NEL PRENDERE LA PAROLA NEI DIVERSI MOMENTI DI DISCUSSIONE (IN PICCOLO, MEDIO, GRANDE GRUPPO); →SVILUPPO DEL SENSO CRITICO IN MATEMATICA.</i>
ATTIVITÀ DI CONTROLLO	<i>DISCUSSIONE IN PICCOLO, MEDIO, GRANDE GRUPPO; COSTRUZIONE DI FIGURE; BRAIN STORMING; CREAZIONE DI STORIE E/O INDOVINELLI; ...</i>
LUOGHI	<i>AULA, GIARDINO, AULA INFORMATICA...</i>
TEMPO	<i>DURATA DEL TIROCINIO, CIRCA.</i>
MATERIALI	<i>LIBRO "FLATLANDIA", LIBRI DI TESTO ADOTTATO DALLA CLASSE, COMPUTER, MATERIALI PER LA COSTRUZIONE DELLE FIGURE SOLIDE E DEI PIANE, CONOSCENZE E DUBBI DEI BAMBINI, VARI E EVENTUALI...</i>

Le ipotetiche misconcezioni alle quali si è pensato di rivolgere l'attenzione nascono da:

- presentazione delle figure piane orientate nello “spazio-foglio” sempre nel medesimo modo;
- acquisizione di una non corretta teoria proposta dell'insegnante o dal libro di testo;
- uso di un linguaggio ambiguo;
- classificazione non del tutto corretta dei quadrilateri.

3.2 Misconcezioni: Riconoscimento e riflessioni in aula

3.2.1 Il contesto

L'esperienza di tirocinio è stata sostenuta nella classe IV della scuola elementare "Boschetti Alberti" del III circolo didattico di Rimini.

La classe è composta da 20 bambini e 5 maestre: tra queste due sono le insegnanti di sostegno che si alternano e che seguono un bambino con difficoltà d'apprendimento; una terza maestra insegna inglese e le due restanti le materie rimaste: la maestra Caterina italiano- storia- educazione all'immagine- studi sociali, la maestra Raffaella matematica- scienze- geografia- educazione motoria- educazione al suono e alla musica. Ed è stata quest'ultima la tutor sotto il controllo e la collaborazione della quale si è svolta l'attività didattica con tema le misconcezioni.

La maestra Raffaella si è dimostrata fin dall'inizio molto colpita dall'argomento proposto. Se tale è stato l'entusiasmo dell'insegnante quello dei bambini lo è stato ancora di più: le metodologie didattiche adottate nell'affrontare i diversi argomenti hanno coinvolto e conquistato l'interesse dei bambini. L'intera classe si è sentita parte fondamentale del percorso didattico anche e soprattutto Alex: il bambino con sostegno. Significativi sono stati i progressi osservati durante l'intera esperienza didattica. Alex ha voluto seguire ogni incontro e in ognuno di questi è stato chiamato a intervenire al pari dei suoi compagni: la sua attenzione e i suoi continui miglioramenti hanno spinto il team docente della classe a

non progettare attività personalizzate ma solo ad abbassare il livello di complessità di taluni esercizi.

3.2.2 Il progetto didattico

I primi incontri si sono incentrati sull'osservazione, l'ascolto e la raccolta di materiali. Durante questa fase sono emerse numerose misconcezioni che si sono aggiunte a quelle citate nel paragrafo 3.1.3:

- I bambini non sanno né rintracciare né individuare le altezze in un triangolo o in un qualunque quadrilatero;
- I bambini dichiarano che nel triangolo c'è solo un solo vertice
- I bambini non distinguono il vertice e da un angolo;
- I bambini confondono le altezze con assi di simmetria e le diagonali...

È stato necessario però compiere una scelta: in 65 ore era impossibile affrontare tutte le misconcezioni.

Dopo aver preso visione delle misconcezioni e delle cause alla base della loro formazione, dopo aver osservato i soggetti a cui il percorso didattico si riferisce, dopo aver considerato la durata dell'itinerario didattico si è progettato il percorso dal titolo: Iniziamo dalle misconcezioni.

- Titolo: Iniziamo dalle misconcezioni
- Discipline coinvolte: Matematica, educazione all'immagine, informatica e italiano.
- Insegnanti coinvolti: Maestra dell'area scientifica-matematica
- Obiettivi cognitivi: → il bambino comprende il significato dei termini tecnici della geometria: punto, vertici, perimetro, area, altezze...;
→ il bambino riconosce, descrive e costruisce le figure piane.

Competenze sociali:	<ul style="list-style-type: none"> → il bambino rispetta i turni nel prendere la parola nei diversi momenti di discussione (piccolo, medio e grande gruppo); → il bambino sviluppa il senso critico in matematica; → il bambino sviluppa la capacità di auto-correzione.
Attività di controllo:	Brainstorming, discussioni e confronti nei gruppi, costruzione di carte d'identità delle figure piane.
Luoghi:	Aula e aula di informatica.
Tempi:	Durata dell'esperienza di tirocinio
Materiali:	Libro di testo adottato dalla classe, computer, materiali per la costruzione delle figure piane, conoscenze e dubbi dei bambini, quaderni, vari e eventuali...
Argomenti:	Misconcezioni causate da: <ul style="list-style-type: none"> → linguaggio → trasmissione di modelli errati

3.2.3 Le misconcezioni e il linguaggio

In questo paragrafo sono affrontati due percorsi sulle misconcezioni. Ciò che li accomuna è il linguaggio specifico della matematica. Come già dichiarato nel paragrafo 2.2.3 il linguaggio tecnico può essere fonte di imbarazzo per gli studenti che non riescono a comprendere il significato dei termini.

Nell'affrontare il primo percorso (il punto geometrico) si è fatto riferimento agli studi effettuati da Sbaragli (2003), Maier (1993, 1998) e Mariotti (1992, 1993, 1995).

Il secondo percorso (perimetro e contorno) prende spunto da studi e ricerche di Maier (1993, 1998).

➡ Il punto geometrico

Sfogliando i quaderni di geometria dei bambini in una pagina dal titolo “Geometria Piana” si trova questa frase: “il punto geometrico non ha dimensioni ed è quindi piccolissimo”⁶. Riconosciuta la misconcezione, presente nella frase sopra riportata, si è organizzato un percorso sul punto e sul significato che assume nei diversi contesti.

L’attività consta di 5 incontri, per un totale di 9 ore. Ad ogni incontro corrisponde una fase del percorso didattico. Questi gli obiettivi del progetto:

- Il bambino comprende il significato che il termine “punto” assume in uno specifico contesto;
- Il bambino comprende la presenza e l’importanza di un contesto di riferimento.

✚ Fase 0: Introduzione alla problematica (1h e 30 min.)

Ad ogni bambino sono stati distribuiti tre cartoncini colorati nei quali hanno scritto cosa la parola punto suggeriva loro. I bigliettini sono stati applicati su di un cartellone bianco. I bambini hanno letto e commentato le frasi sui cartoncini: *«maestra alcune frasi sono uguali»* (Alex), all’osservazione del compagno sono seguite alcune proposte per rendere il cartellone *«più ordinato»* (Sara). Tra le tante proposte si è optato per quella di Filippo: *«noi stacciamo tutti i cartoncini e poi li rimettiamo nel cartellone ordinati in delle colonne»*. Al termine di questa riorganizzazione sono apparse sette colonne che i bambini hanno deciso di indicare con questi titoli:

- Colonna della matematica
- Colonna della geometria
- Colonna dell’arte

⁶ Allegato A: Definizione di punto geometrico.

- Colonna dell'informatica
- Colonna degli sport
- Colonna delle automobili
- Colonna dell'italiano (punteggiatura)

Osservando le sette colonne i bambini si sono accorti che una stessa parola può assumere significati del tutto diversi a seconda del contesto in cui è inserita. Questo è un frammento del dialogo avvenuto in classe:

Simone: *«Maestra quando hai detto di scrivere una frase io ho pensato subito al punto geometrico»*

Maicol: *«E io a quello di italiano»*

T: *«Bene. E ora proviamo a pensare perché ognuno di noi ha avuto tante idee diverse»*

Alex: *«Perché non esiste solo il punto della geometria ma anche quello della matematica, dell'italiano»...*

Marco: *«Sì e poi ogni volta che pensi al punto ti vengono in mente tante cose diverse»*

T: *«Tante cose diverse, cioè spiegami»*

Marco: *«Ad esempio mi viene in mente un punto così (indica il punto della punteggiatura), ma anche la punto la macchina e poi anche il punto che mette il dottore quando cade...»*

Giulia: *«Mi sono ricordata che c'è un altro punto: il punto di vista»*

T: *«È vero, brava. Quindi esistono tante cose che si chiamano punto»*

Marco: *«Sì ma non sono tutte uguali perché il punto di vista è astratto mentre la punto no...»*

Luca: *«Il punto geometrico è piccolissimo e i punti del dottore invece sono più grandi...»*

✚ Fase 1: Il punto e la punteggiatura (1h e 30 min.)

Approfittando del ritorno di un alunno assente il giorno precedente è stato fatto un ripasso veloce, dai compagni, del lavoro effettuato. Ripasso che ha permesso di apportare nuove riflessioni e chiarimenti.

Dopo questo primo momento si è affrontato il “punto nella punteggiatura”. Numerosi sono stati i cartoncini riferiti alla punteggiatura.

L'attività proposta consta di due sottofasi:

- Sottofase A → I bambini sono chiamati a inserire la punteggiatura in frasi che ne sono prive;
- Sottofase B → I bambini discutono le diverse punteggiature, motivandone la scelta.

✚ Fase 2: Il punto nell'arte (3 h)

Dopo un ripasso della lezione del giorno precedente ai bambini è stato chiesto di spiegare cos'è il punto nell'arte: aprendo il libro di testo hanno fatto vedere un'immagine raffigurante un quadro di Seurat “Il circo”. Dopo aver discusso sulla tecnica di questo pittore attraverso la visione di altri suoi dipinti ai bambini sono stati fatti vedere anche delle rappresentazioni di altri artisti: Lichtenstein, Kandinsky, Klee, Mirò e Fontana.

Si è ragionato sulla presenza di tanti tipi diversi di punti «*ci sono dei puntini piccolissimi che quasi non si vedono e i sono dei punti grandi come quello di Kandinsky*» (Gianluca); «*poi dipende anche se usi un pennello grande o uno fine*» (Chanel).

Da questa considerazione parte la prima attività del “punto in arte”: sulla cattedra sono stati disposti colori a tempera, uniposcar, pennarelli di diverse grandezze e altri materiali di varia utilità (spugne, pennello da barba, ecc...).

Questa attività è tratta da uno dei tanti laboratori didattici di Munari: i bambini con le loro tavolozze da pittore (i fogli di carta) raccolgono tutti i tipi di punti lasciati dai diversi strumenti presenti sulla cattedra.

Dopo questa attività i bambini vengono divisi in cinque gruppi ognuno dei quali ha il compito di creare un disegno con la tecnica del puntinismo.

🚦 Fase 3: Il punto geometrico e il punto matematico⁷ (2 h)

La lezione inizia con una riflessione sulla differenza che i bambini dimostrano di avere tra il punto geometrico e il punto matematico. Numerose sono state le risposte e queste le più significative:

- *«il punto geometrico è quello che si fa con le linee e il punto matematico si mette tra i numeri»* (Lorenzo);
- *«il punto matematico è quello che si mette quando si fa matematica»* (Matteo);
- *«il punto matematico indica la virgola»* (Andrea);
- *«il punto geometrico è molto più piccolo di quello matematico»* (Sara).

A questa ultima dichiarazione è seguito un dibattito sulla grandezza che il punto deve avere in geometria.

Un bambino ha esplicitato il proprio pensiero su questa discussione dichiarando che il punto geometrico non ha dimensioni e quindi è piccolissimo⁸. Alla domanda: “cosa vuol dire non avere dimensioni” i bambini rimangono ammutoliti. Turbati dalla situazione, iniziano a mormorare tra di loro fino a quando Filippo domanda: *«maestra come può essere piccolissimo (il punto) se è senza dimensioni?»* a questa sono seguite delle considerazioni di alcuni compagni *«allora se non ha*

⁷ I bambini sono stati portati a considerare la geometria e la matematica due materie diverse: una dove si disegnano le figure, l'altra dove si fanno tanti calcoli.

⁸ Questa è la definizione che i bambini hanno imparato a memoria.

dimensioni non lo possiamo disegnare...» (Eilyn); «se non ha dimensioni io lo posso disegnare con la mente anche enorme...tanto non ha dimensioni» (Simone). Le considerazioni dei bambini sulla nuova scoperta si sono susseguite vertiginosamente.

✚ Fase 4: Il vocabolario (1h)

Ai bambini è stato chiesto di prendere il proprio vocabolario e di cercare la parola punto. Alcuni si sono accorti che sotto questa voce vi sono numerosi esempi e classificazioni.

Dalla lettura delle definizioni presenti nei dizionari è stata proposta un'attività di gioco consistente nell'individuare la categoria d'appartenenza delle varie definizioni di punto.

L'attenzione dei bambini è stata particolarmente colpita dalle definizioni riguardanti il punto geometrico, soprattutto quando risultavano non del tutto esatte o corrette.

✚ Riflessioni

Portare il bambino a riflettere e ragionare sul proprio sapere si è dimostrata una metodologia proficua: i bambini si sono divertiti nel mettersi in discussione. Cosa ancor più importante a livello didattico i bambini hanno scoperto un nuovo sapere da soli: non è stata l'insegnante a imporre una nuova conoscenza ma sono stati loro a costruire un "nuovo" sapere, interrogandosi su ciò che fin a quel momento credevano essere una certezza.

➡ Perimetro e contorno

Per capire meglio i bambini e individuare le probabili misconcezioni si è distribuita loro una scheda con tre domande:

- Cos'è il perimetro di una figura?

- Cos'è l'altezza di una figura geometrica?
- Cos'è il vertice di una figura geometrica?

Curiose sono state le risposte emerse dalle tre domande: le risposte alla prima domanda offrono la possibilità di creare un percorso incentrato sul linguaggio tecnico-specifico della matematica (per essere più precisi della geometria).

Il percorso si sviluppa in due fasi:

✚ Fase 0: Introduzione alla problematica (1h)

Ai bambini vengono date le domande alle quali devono rispondere autonomamente.

✚ Fase 1: Correzione delle risposte (5h)

Di seguito sono riportate le risposte date alla prima domanda dagli alunni:

Che cos'è il perimetro di una figura?

- È il contorno di una figura geometrica, cioè la somma dei lati;
- Quanto misura una figura;
- È la somma dei contorni dei lati.

Alcune di queste risposte sono il risultato della non corretta comprensione della domanda o del timore di lasciare il foglio in bianco: subito dopo la consegna la maestra si rivolge ai bambini con questa frase *«non potete non rispondere a queste domande, sono facilissime e abbiamo ripassato tutte queste cose ieri pomeriggio quindi le dovete sapere sicuramente»*.

Le risposte nascondono in sé una misconcezione legata al linguaggio specifico della matematica che entra in rapporto con il significato che il termine perimetro assume nel linguaggio quotidiano.

Dopo aver trascritto le risposte degli studenti alla lavagna i bambini hanno iniziato a discutere sul significato delle definizioni da loro riportate.

Ricordando le attività svolte sul punto geometrico i bambini hanno rivolto la loro attenzione sul significato che assume la loro definizione di perimetro e si sono accorti che *«ma io ho sommato il numero dei lati e no quanto misurano i lati vero maestra?»* (Gianluca). Dopo aver riflettuto su questa nuova conoscenza i bambini hanno proposto di cercare sul dizionario le parole contorno e perimetro, riproponendo il gioco con il dizionario.

3.2.4 Le misconcezioni e la rappresentazione iconografica

In Maier (1993) si legge: *«i concetti geometrici degli allievi rimangono fortemente legati con i pochi modelli ai quali è stata limitata la presentazione delle nozioni geometriche»* [Maier (1993), pag.76]. Alla base del percorso di seguito presentato (le figure prototipo) vi sono le teorie di Maier (1993) e Mariotti (1993, 1995).

➡ Le figure prototipo

Ci si è accorti che i bambini, pur conoscendo molto bene le caratteristiche e le proprietà di una figura geometrica, riscontrano non poche difficoltà nell'identificare la stessa figura geometrica ruotata nello spazio. Anche questo percorso sulle misconcezioni, legate in questo caso alla rappresentazione iconica che come si evince dal paragrafo 2.3.2 possono essere la causa di convinzioni errate, si sviluppa in quattro fasi:

✚ Fase 0: presentazione della problematica (1h)

Ai bambini è stato fatto costruire un quadrato in carta ed è stato chiesto loro di attaccarlo al muro per un vertice. Nonostante abbiano loro stessi costruito, ritagliato e appeso il quadrato i bambini hanno identificato con il termine rombo le rappresentazioni da loro prodotte e applicate sul muro della classe. Dopo un primo lungo momento di sconcerto si è pensato a quali metodi utilizzare per far riflettere i bambini sulla loro convinzione (gli alunni sono stati portati a costruire nella propria mente delle figura prototipo).

✚ Fase 1: primo metodo (1h)

Si è preso un bambino e lo si è posto davanti ai compagni. Quest'ultimi hanno descritto il loro compagno (colore dei capelli, occhi, vestiti, segni particolari, nome, cognome ed età). Dopo questa prima fase il bambino è stato posto seduto sulla cattedra, in piedi sulla sedia, in ginocchi sulla cartella e di spalle rispetto a loro... lo si è quindi orientato in modo diverso nello spazio. I compagni per ogni posizione assunta dall'amico hanno riportato la medesima descrizione. Molti di loro hanno iniziato a capire: *«quindi le caratteristiche principali sono le stesse anche se Alex è in piedi o seduto, allora anche al quadrato succede la stessa cosa»* (Maicol)

✚ Fase 2: secondo metodo (1 h)

Partendo dalla considerazione di Maicol si sono fatte costruire altre figure (rettangoli, trapezi e triangoli...). I bambini hanno ruotato le figure create comprendendo sempre di più che capovolgendole le caratteristiche non cambiano.

✚ Fase 3: terzo metodo (1h)

Un bambino ha dimostrato con tenacia di non comprendere perché il quadrato ruotato nella posizione solitamente caratterizzante la figura del rombo è chiamato ancora quadrato: *«ma se io lo giro diventa per forza un rombo, vedi! È come il rombo»* (Simone).

Ragionando con i compagni il bambino ha compreso il proprio “errore” ma la sua misconcezione si è dimostrata talmente radicata da portarlo a chiamare il quadrato orientato diversamente “Quadrato storto”: *«questo è il quadrato mentre questo è sempre un quadrato ma è storto»* (Simone).

Nonostante gli interventi dei compagni e dell’insegnante per Simone non può esistere un quadrato disegnato in modo diverso com’è abituato a vederlo.

3.2.5 Le modalità di verifica

Per verificare l’effettivo raggiungimento degli obiettivi si è pensato di presentare attività diverse dalle solite interrogazioni.

Si è cercato di valutare non solo le conoscenze acquisite ma l’intero percorso affrontato dal bambino.

Come attività di controllo si è utilizzato il brainstorming con lo scopo di portare i bambini a ragionare tra di loro piuttosto che far acquisire una conoscenza trasmessa. I bambini riflettono e confrontano le proprie conoscenze e i propri dubbi: il ruolo dell’insegnante e della tirocinante è stato volutamente marginale, ma comunque sempre di regista.

Questo strumento di verifica non può essere paragonato ad una semplice interrogazione: il brainstorming richiede tempo e molta attenzione da parte dell’insegnante perché deve cogliere ogni frase dei bambini.

I bambini, discutendo, mettono in gioco ogni loro conoscenza e l'insegnante, grazie a queste attività di confronto, può prendere atto del percorso d'apprendimento del bambino e dell'intera classe.

L'interrogazione guarda al risultato e l'unica cosa che valuta è la risposta che può assumere solo tre valori: sufficiente, insufficiente e incompleta. Inoltre l'interrogazione pone come regola principale il silenzio da parte dei compagni...nel far discutere 20 bambini non si può pretendere il silenzio, anzi gli interventi stanno alla base dell'attività di brainstorming.

Un'altra attività di controllo è il gioco dell'insegnante⁹: così definito dai bambini. A turno gli alunni vanno alla lavagna e spiegano agli altri le lezioni precedenti o alcuni esercizi assegnati loro. I bambini-maestri prendono con molta serietà l'attività: interrogano i compagni e li mandano alla lavagna per risolvere esercizi; i bambini-alunni fanno domande e chiedono spiegazioni.

Infine un'attività peraltro molto simile a quella appena descritta, consiste nel chiamare uno o più bambini a spiegare ai compagni assenti alle lezioni passate: in questo modo si può valutare non solo l'apprendimento dei bambini ma anche i dubbi su argomenti non ancora capiti.

⁹ Allegato B: Il gioco dell'insegnante.

Capitolo 4

4.1 Riflessioni conclusive

4.1.1 Confronto con le esperienze precedenti

Il tirocinio di quest'anno ha assunto un significato particolare ancora prima di iniziare: questa esperienza didattica è alla base della tesi universitaria. Ho lavorato moltissimo per rendere l'esperienza molto produttiva e ricca di spunti da affrontare nella stesura della tesi.

Inutile quindi dire che la differenza principale che distingue questo tirocinio con quelli degli anni precedenti sia proprio il grande entusiasmo e l'enorme coinvolgimento emotivo.

Altre differenze mi sento di sottolineare: la maturità e l'esperienza. Non voglio peccare di presunzione ma credo che il tirocinio di quest'anno sia l'incoronamento di quattro anni di studio teorico e di riflessioni pratiche. Per quanto riguarda la teoria penso che tutte le lezioni e gli insegnamenti seguiti e studiati durante questi 4 anni di università mi siano serviti a trasformare una semplice esperienza di tirocinio in una magnifica avventura, nella quale mi sono messa totalmente in gioco e con la quale ho raccolto moltissimo a livello professionale e personale, da bambini e maestre.

Per quanto riguarda invece la pratica penso che tutti i tirocini che fanno parte del mio curriculum vitae (da quelli svolti alle magistrali a quello del IV anno universitario..) mi abbiano modificato e arricchito

enormemente su quattro livelli: emotivo, professionale, personale e soprattutto culturale.

Naturalmente non credo che questi anni di studio possano bastare per far di me la maestra perfetta che vorrei essere ma penso che ho già tracciato un solco profondo sul quale lavorare per migliorare e per crescere ancora di più: la perfezione non la raggiungerò ma mi accontento di arrivarci abbastanza vicino per me ma soprattutto per i bambini che avrò.

Ho molto entusiasmo al termine di questa esperienza di studio e non vorrei che la realtà trasformasse la mia energia in routine; vorrei sempre avere la forza che ho adesso nel mettermi in gioco e la capacità di ammettere che ho tanti limiti da affrontare; vorrei poter lavorare con alcune colleghe, conosciute quest'anno in facoltà, perché reputo la collaborazione professionale uno stimolo grandissimo e importante in qualsiasi tipo di lavoro... Infine vorrei continuare a crescere professionalmente tutelata da un'università ricca di docenti secondo me illuminati. Uno su tutti il mio professore di tesi che oltre a essere un rinomato studioso riconosciuto a livello europeo ed extra-europeo lo è anche a livello personale: professori come Bruno D'Amore sono veramente rari e io mi reputo molto fortunata e onorata di aver potuto lavorare sotto il suo controllo.

Con la speranza di un futuro, se possibile, ancor più brillante del passato e del presente termino questa tesi preannunciando una prossima ri-iscrizione all'università di Scienze della Formazione Primaria per una seconda laurea ad indirizzo: scuola dell'infanzia.

4.1.2 Ringraziamenti

Finalmente siete giunti alla fine di questa tesi, e con voi anche io. Fin da quando ero bambina sognavo di diventare maestra, un sogno che mi accomuna a molte bambine ancor oggi. A volte però un semplice sogno può diventare un qualcosa di più forte e diventare una vera e propria passione. Da alunna della scuola elementare ammiravo le mie maestre e immaginavo di essere come loro. Ai miei occhi da bambina loro erano un punto di riferimento importantissimo.

Ho sempre pensato e in seguito sviluppato l'idea che l'insegnante occupasse un ruolo decisivo nella crescita del bambino: la costruzione dell'identità, di una conoscenza e di un sapere culturale, la scoperta di sé stessi, la consapevolezza delle proprie capacità...

Armata di tali presupposti alla fine delle scuole medie inferiori annunciai alla mia famiglia di voler frequentare l'università per diventare maestra. Per realizzare il mio sogno occorreva iscriversi a una scuola media superiore che potesse offrirmi le basi per gli studi futuri: l'istituto magistrale. I cinque anni delle magistrali mi hanno profondamente cambiato. Numerosi sono stati i professori che nel corso degli anni si sono succeduti. Tra questi non posso non ringraziare la professoressa Bernardi, il professor Marconi, la professoressa Del Fagio e la professoressa Save.

Seppur a livello personale e culturale io sia cresciuta moltissimo, professionalmente l'istituto magistrale non è riuscito a fare di me l'insegnante che avrei voluto essere.

È solo frequentando l'università che mi sono accorta di quanto ero lontana dal mio sogno. Carica di coraggio e di ancora tanta passione mi sono iscritta al corso di laurea di Scienze della Formazione Primaria dove ho frequentato i quattro anni accademici. Durante questo periodo

ho dovuto sostenere circa 50 esami parziali, 5 tirocini e 12 laboratori... è stata dura ma le soddisfazioni non sono mancate.

Ho potuto assistere a corsi tenuti da docenti meravigliosi sia a livello personale che, e soprattutto, professionale.

Non potendo ringraziare uno a uno ogni singolo professore e assistente rivolgo i miei ringraziamenti a un docente su tutti, il professor Bruno D'Amore. Non ci sono parole per descrivere la gratitudine che gli devo per l'appoggio e l'attenzione dimostrata nonché per i preziosi suggerimenti offertimi nella stesura di questa tesi.

E con D'Amore come non ringraziare in particolare una sua collaboratrice che per quattro anni è stata la mia tutor di tirocinio: Franca Masi. La mia crescita professionale è dovuta anche alla sua sempre attenta presenza e ai suoi preziosi consigli.

L'università mi ha dato modo di poter conoscere anche tante future e probabili "colleghe". Tra queste ve ne sono due che mai dimenticherò: Elisa e Carmela, due splendide e sincere amiche.

Come non rivolgere i miei ringraziamenti a tutta la mia famiglia che mi ha sempre incoraggiata, sopportata e sostenuta nelle scelte intraprese: i miei genitori e mia sorella Simona, i miei nonni, zii e cugine che anche da lontano non mi hanno mai fatto mancare appoggio e affetto.

Un grandissimo ringraziamento a Marco, il mio ragazzo, che in questo periodo mi è stato particolarmente vicino, mi ha incoraggiata e aiutata nella battitura di questa tesi.

E per concludere un immenso grazie ai miei angeli che mai hanno smesso di guidarmi.

Potrebbe sembrare troppo lo spazio dedicato ai ringraziamenti ma nulla in confronto a ciò che tutte queste persone hanno dato a me.

Grazie

ALLEGATI

- ALLEGATO A: Definizione di punto geometrico
- ALLEGATO B: Il gioco dell'insegnante

Allegato A: Definizione di punto geometrico

GEOMETRIA PIANA

La geometria.

La geometria studia la forma e l'estensione dei corpi.

Essa è una scienza.

IL PUNTO GEOMETRICO

Il punto geometrico non ha dimensioni ed è quindi piccolissimo. ←

Un insieme di punti formano una figura geometrica.

La linea.
La linea geometrica ha una sola dimensioⁿ la lunghezza.

~ linea

Allegato B: Il gioco dell'insegnante



BIBLIOGRAFIA

A.A.V.V. (1990), *Il sussidiario. Itinerari conoscitivi di base per la classe quarta*. Milano, Cetem.

Brousseau G. (1986), Fondements et methodes de la mathématique. *Recherches en didactique des mathématique*, 7, 2, 33-115.

Caldelli M.L. & D'Amore B. (1986), *Idee per un laboratorio di matematica nella scuola dell'obbligo*. Scandicci (Firenze), La Nuova Italia.

Crispani P. & Serio N. (a cura di) (2000), Progettare con i concetti. *Manifesto sulla progettazione*. Roma, Armando Editore, 193-212.

D'Amore B. (1993), Esporre la matematica appresa: un problema didattico e linguistico. *La matematica e la sua didattica*, 3, 289-301.

D'Amore B. (1994), "Didattica generale" e "Didattica specifica". Ci sono convergenze possibili o solo dissidi? *La didattica*, 2, dicembre, 28-34.

D'Amore B. (ed.) (1995), *Insegnare ad apprendere la Matematica in aula: situazioni e prospettive*. Atti dell'omonimo Convegno Nazionale, Castel San Pietro Terme. Bologna, Pitagora.

D'Amore B. (1999), *Elementi di didattica della matematica*. Bologna, Pitagora.

D'Amore B. & Frabboni F. (1996), *Didattica generale e didattiche disciplinari*. Milano, Angeli.

D'Amore B.& Sbaragli S. (2003), *La didattica della matematica in aula*. Bologna, Pitagora Editrice.

Deri M., Sainati Nello M. & Sciolis Marino M. (1983), Il ruolo dei modelli intuitivi primitivi per la moltiplicazione e la divisione. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 6, 6, 6-27.

Domenico G. (2001), *Manuale della valutazione scolastica*. Roma, Gius. Laterza & Figli Spa.

Fandiño Pinella M. I.& Sbaragli S. (2001), *Matematica di base per insegnanti in formazione*. Bologna, Pitagora Editrice.

Godino J.D. (1991), Hacia una teoria de la didactica de las matematicas. [Trad. it. in: *La matematica e la sua didattica*, 3, 1993, 261-288].

Laborde C. (1995), Occorre apprendere a leggere e a scrivere in matematica? *La matematica e la sua didattica*, 2, 121-135.

Maier H. (1993), Problemi di lingua e di comunicazione durante le lezioni di matematica. *La matematica e la sua didattica*, 1, 69-80.

Maier H. (1998), *Il conflitto tra lingua matematica e lingua quotidiana*. Bologna, Pitagora Editrice.

Mariotti M.A. (1992), Immagini e concetti in geometria. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 15, 9, 863-885.

Mariotti M.A. (1993), Il ruolo della visualizzazione in matematica. *Scuola viva*, XXXIX, 2, fasc. 2, 10-16.

Mariotti M.A. (1995), Le rappresentazioni grafiche e l'apprendimento della geometria. In: D'Amore B. (1995), 47-58.

Sbaragli S. (2003), Uno sguardo all'infinito: il punto nei diversi ambiti. In: D'Amore B., Sbaragli S. (2003). 162-167.

Schoenfeld A.H. (1987), What's all the fuss about metacognition? In: *Cognitive science and mathematics education*. Hillsdale (N.J.), Lawrence Erlbaum Ass.

Schubauer- Leoni M.L. & Ntamakiliro L. (1994), La construction de réponses à des problèmes impossible. *Revue des sciences de l'éducation*, XX, 1, 87-113.

Selinker L. (1972), Interlanguage. *International Review of Applied linguistics*, 10, 209-31.

Vygotskij L. S. (1966), *Pensiero e Linguaggio*. Firenze, Giunti e Barbèra.

Vygotskij L.S. (1974), *Storia dello sviluppo delle funzioni psichiche superiori*. Firenze, Barbèra.

Zan R. (1998), *Problemi e Convinzioni*. Bologna, Pitagora.